Calculs algébriques

I. Fractions

• Dans un calcul littéral, l'écriture $\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.

• Le signe « moins » dans un quotient : $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

• Égalité :

- $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

• Addition, soustraction avec dénominateur commun : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

• Addition, soustraction avec dénominateur différent : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$.

II. Puissances

• $a^0 = 1$ • $a^m \times a^n = a^{m+n}$ • si $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ • $(a^m)^n = a^{m \times n}$

• si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ • $a^n \times b^n = (ab)^n$ • si $b \neq 0$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

III. Écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal a est $b \times 10^n$ où b est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un entier relatif.

IV. Carré

• Deux nombres réels opposés ont le même carré : Pour tout nombre a, on a $(-a)^2 = a^2$.

• Pour tous nombres réels a et b, on a $a^2 b^2 = (ab)^2$ et si $b \neq 0$, $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

V. Racine carrée

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a. Pour tout $a \geqslant 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Soit a un nombre réel. Alors :
- Si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$.
- Si $a \leqslant 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$.

Soit a et b deux nombres réels positifs. On a alors :
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque
Par convention, on ne laisse jamais de radical, c'est-à-dire de racine carrée au dénominateur. Pour « supprimer » ce radical, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par ce même radical.

VI. Développement et factorisation

Développer un produit de facteurs, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
Pour tous nombres a, b, c, d et k, on a :
- $k(a+b) = ka + kb$
- $k(a-b) = ka - kb$
- $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$

VII. Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

VIII. Équations, inégalités et inéquations

- Une équation (respectivement une inéquation) est une égalité (respectivement une inégalité) dans laquelle est **présente une inconnue (ou des inconnues)**.
- Un nombre est **solution d'une équation** (respectivement **d'une inéquation**) si, en substituant ce nombre à l'inconnue, on obtient **une égalité** (respectivement **une inégalité**) **vraie**.

- Résoudre une équation (respectivement une inéquation), c'est déterminer **toutes les solutions de l'équation** (respectivement de l'**inéquation**).
- Deux équations (respectivement deux inéquations) sont **équivalentes si elles ont les mêmes solutions**.

• **La multiplication et la division** des deux membres d'une inégalité **par un même nombre strictement négatif change l'ordre de comparaison**.
• Les autres opérations ne modifient pas l'ordre.

Modéliser un problème par une inéquation, c'est **écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème**.

IX. Quelques résolutions d'équations

Équation produit nul
Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=0 \text{ ou } \mathrm{B}=0$$

Équation quotient nul
Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=0 \text{ et } \mathrm{B}\neq 0$$

Équation carrée
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a<0$, l'équation n'admet aucune solution.
• Si $a=0$, l'équation admet $x=0$ comme unique solution.
• Si $a>0$, l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$.

Équation racine carrée
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\sqrt{x}=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a<0$, l'équation n'admet aucune solution.
• Si $a\geqslant 0$, l'équation admet une unique solution $x=a^2$.

Équation inverse
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\frac{1}{x}=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a=0$, l'équation n'admet aucune solution.
• Si $a\neq 0$, l'équation admet une unique solution $x=\frac{1}{a}$.

Méthodes : résolution d'équation et d'inéquation

• 1[er] exemple : $x+3=-x+7$

On regroupe tous les x à gauche de l'inégalité. On doit donc ajouter x de chaque côté.

$$x+3+x=-x+7+x$$

On obtient alors : $2x+3=7$.

On regroupe tous les autres nombres (sans x) à droite. On doit donc soustraire 3 de chaque côté.

$$2x+3-3=7-3$$

On obtient alors : $2x=4$.

On isole l'inconnue x . On doit donc diviser par 2 .

$$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2}$$

On obtient alors : $x=2$. L'ensemble solution est alors $S=\{2\}$.

En version condensée : $x+3=-x+7 \Leftrightarrow x+3+x-3=-x+7+x-3 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$.

• 2[e] exemple : $\frac{x}{3}+2=3$

On regroupe tous les autres nombres (sans x) à droite. On doit donc soustraire 2 de chaque côté.

$$\frac{x}{3}+2-2=3-2$$

On obtient alors : $\frac{x}{3}=1$.

On isole l'inconnue x . On doit donc multiplier par 3.

$$\frac{x}{3}\times 3=1\times 3$$

On obtient alors : $x=3$. L'ensemble solution est alors $S=\{3\}$.

En version condensée : $\frac{x}{3}+2=3 \Leftrightarrow \frac{x}{3}+2-2=3-2 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}\times 3=1\times 3 \Leftrightarrow x=3$.

• 3[e] exemple : $4x+2\leqslant 7x+6$

On regroupe tous les x à gauche de l'inégalité. On doit donc soustraire $7x$ de chaque côté.

$$4x+2-7x\leqslant 7x+6-7x$$

On obtient alors : $-3x+2\leqslant 6$.

On regroupe tous les autres nombres (sans x) à droite. On doit donc soustraire 2 de chaque côté.

$$-3x+2-2\leqslant 6-2$$

On obtient alors : $-3x\leqslant 4$.

On isole l'inconnue x . On doit donc diviser par -3 . Comme -3 est négatif, on change l'ordre de comparaison.

$$-\frac{3x}{-3}\geqslant\frac{4}{-3}$$

On obtient alors $x\geqslant -\frac{4}{3}$. L'ensemble des solutions est alors $S=\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

En version condensée : $4x+2\leqslant 7x+6 \Leftrightarrow 4x+2-7x-2\leqslant 7x+6-7x-2 \Leftrightarrow -3x\leqslant 4 \Leftrightarrow x\geqslant -\frac{4}{3}$.