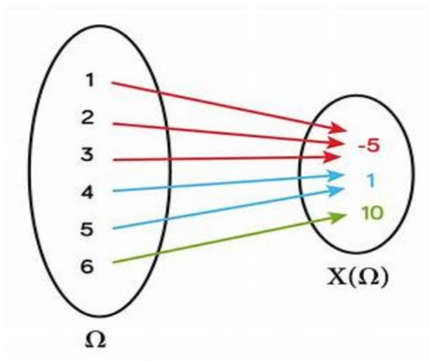
Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

I.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .
Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

Exemple
On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.
• « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
• « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
• « Sinon, je gagne 10 jetons »
On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $\mathrm{X}(1)=-5$, $\mathrm{X}(2)=-5$, $\mathrm{X}(3)=-5$, $\mathrm{X}(4)=1$, $\mathrm{X}(5)=1$, $\mathrm{X}(6)=10$.
On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\{x_1;x_2;\dots;x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1\leqslant i\leqslant k$.

• L'événement « $\mathrm{X}=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
• L'événement « $\mathrm{X}\geqslant x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i . On définit de même « $\mathrm{X}>x_i$ », « $\mathrm{X}<x_i$ », et « $\mathrm{X}\leqslant x_i$ ».
• La probabilité de l'événement « $\mathrm{X}=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i . On la note $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$ ou p_i .
• La probabilité de l'événement « $\mathrm{X}\geqslant x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre supérieurs ou égaux à x_i . On la note $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant x_i)$.

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $\{x_1;x_2;\dots;x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur x_i lui associe sa probabilité notée $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=\boldsymbol{x_i})$	$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_1)$	$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_2)$	$\dots$	$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_n)$

On a $p_1+p_2+\dots+p_n=\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ ou $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_2)+\dots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)=1$.

II. Espérance, variance et écart-type

• L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

• La **variance** de la variable aléatoire X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1(x_1-E(X))^2 + p_2(x_2-E(X))^2 + \dots + p_n(x_n-E(X))^2$$

• L'**écart-type** de la variable aléatoire X est définie comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Remarques

• La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X. Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X. L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.
De même pour l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de X.
Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-0,5$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $0,5$ jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).
Mais avec une moyenne égale à $-0,5$, l'écart-type d'environ $5,41$ exprime le fait que le risque d'obtenir un gain négatif (une perte) est important.

• Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $E(X)=0$ alors on dit que le jeu est équitable.

Formule de König-Huygens

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)^2] = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)^2]$$

Soit a et b deux réels quelconques. La variable aléatoire Y, dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX+b$.

Valeur de Y	ax_1+b	ax_2+b	...	ax_n+b
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n

On pose $Y=aX+b$.

Soit X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels. Alors :

- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $V(aX)=a^2 V(X)$
- $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$