

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note $\exp(x) = e^x$.

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n , on a :

- $e \approx 2,718$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^x \times e^{-x} = 1$
- $e^x \neq 0$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Signe

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

III.2 Variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

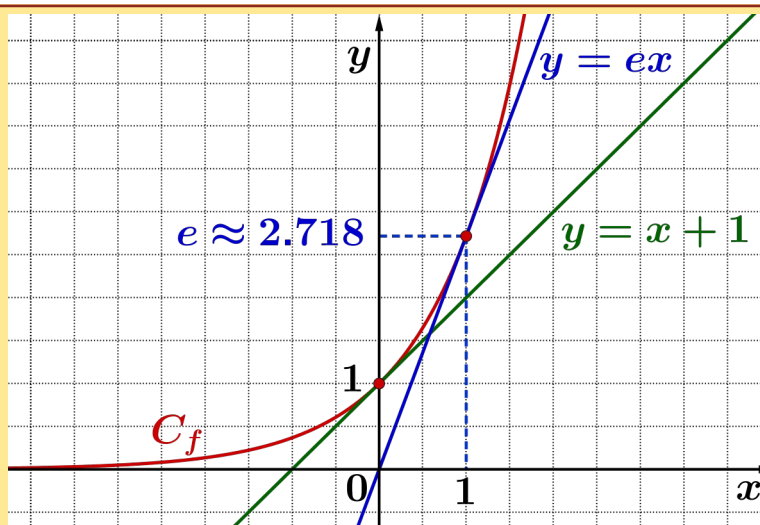
III.3 Limites (hors programme)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

III.4 Tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$		0	1	e
				$+\infty$

III.5 Représentation graphique



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $T_0 : y = x + 1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1 : y = ex$.

IV. Lien avec les suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a . Alors :

- Si $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = +\infty$.
- Si $a < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = 0$.

V. Équations de inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- Si $x \leq 0$, alors $0 < e^x \leq 1$
- Si $x \geq 0$, alors $1 \leq e^x$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction e^u définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est appelée exponentielle de u .
- La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction f a le même sens de variation que la fonction u .