Variables aléatoires

Exercice 1

On fait tourner une roue de loterie formée de huit secteurs : un bleu (B), quatre rouges (R) et trois jaunes (J). Un secteur est alors désigné par une flèche.
On suppose que chaque secteur a la même probabilité d'être désigné.
1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
B : « La couleur désignée est le bleu ».
R : « La couleur désignée est le rouge ».
J : « La couleur désignée est le jaune ».
2. Déterminer de deux façons différentes la probabilité de l'événement « La couleur désignée n'est pas le rouge ».

Exercice 2

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants.
1. A : « La carte tirée est le valet de cœur ».
2. B : « La carte tirée est le sept de pique ».
3. C : « La carte tirée est une dame ».
4. D : « La carte tirée est un trèfle ».

Exercice 3

Un sac opaque contient dix boules, quatre boules portant le numéro 1, trois boules portant le numéro 2, deux boules portant le numéro 3 et une boule portant le numéro 4. On tire au hasard une boule et on lit le nombre de points.
1. Déterminer l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve aléatoire.
2. Donner, à l'aide d'un arbre, la loi de probabilité.
3. Calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir au moins 2 points ».

Exercice 4

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmi les 120 billets distribués, trois donnent droit à 4 places gratuites, 6 donnent droit à trois places gratuites, 18 donnent droit à deux places gratuites, 42 donnent droit à une place gratuite et les autres billets ne gagnent rien.
1. Quelle est la probabilité pour un spectateur de gagner exactement deux places gratuites ?
2. Quelle est la probabilité pour un spectateur de ne rien gagner ?
3. On s'intéresse au nombre de places gratuites gagnées avec un billet.
a. Quels sont les résultats possibles ?
b. Déterminer la loi de probabilité de ces résultats.
c. Quelle est la probabilité pour un spectateur de gagner au moins deux places gratuites.

Exercice 5

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
1. A : « On obtient deux fois PILE ».
2. B : « On obtient deux fois FACE ».
3. C : « On obtient deux résultats distincts ».

Exercice 6

On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'un de ces dés est vert, l'autre est rouge. On lance les deux dés et on note d'abord le nombre sur le dé vert, puis celui sur le dé rouge.

1. Représenter, à l'aide d'un tableau à double entrée, l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve aléatoire.
2. Quelle est la probabilité de chaque issue ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir les mêmes numéros sur les deux dés ?
4. Quelle est la probabilité que la somme soit égale à 4 ?
5. Quelle est la probabilité que la somme soit strictement supérieure à 7 ?

Exercice 7

On lance successivement un dé cubique parfait et une pièce de 1€ bien équilibrée.
À PILE on associe le nombre 1 et à FACE on associe le nombre 2.
Un résultat de l'épreuve aléatoire est la somme du numéro obtenu sur le dé et du nombre obtenu.
1. Dresser un arbre donnant toutes les possibilités.
2. En déduire la probabilité d'obtenir une somme :
a. Impaire ; **b.** Multiple de 3 ; **c.** Égale à 6 ;
d. Ni 6, ni 5 ; **e.** Au moins 4 ; **f.** Au plus 3.

Exercice 8

Une boîte contient beaucoup de billes unicolores, rouges, vertes ou bleues. On prend une poignée de trois billes.
On s'intéresse aux événements :
A : « Deux billes au moins sont vertes ».
B : « Les trois billes sont de la même couleur ».
C : « Il y a au moins une bille rouge ».
D : « Aucune bille n'est rouge ».
E : « Le tirage est tricolore ».
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
1. Les événements A et B sont incompatibles.
2. Les événements B et E sont contraires.
3. Les événements A et C sont incompatibles.
4. Les événements C et D sont contraires.
5. Les événements A et E sont disjoints.

Exercice 9

On considère deux événements A et B tels que : $P(A)=0,7$, $P(B)=0,4$ et $P(A\cap B)=0,2$.
1. Calculer $P(A\cup B)$.
2. Calculer $P(\bar{A})$.
3. C est un événement tel que B et C sont incompatibles et $P(C)=0,3$.
Calculer $P(B\cup C)$.

Exercice 10

Soit A et B deux événements incompatibles tels que $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,2$.
Calculer $P(A\cap B)$ et $P(A\cup B)$.

Exercice 11

Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 3 à la fois à la pêche et à la lecture. On choisit au hasard une personne du groupe.

1. Calculer la probabilité qu'elle s'intéresse à la pêche ou à la lecture.

2. Calculer la probabilité qu'elle ne s'intéresse ni à la pêche, ni à la lecture.

Exercice 12

Le tableau suivant indique les résultats d'un groupe d'élèves à un examen en fonction de leur qualité d'interne ou d'externe.

	interne	**externe**
admis	58	212
non admis	40	75

1. On rencontre par hasard un élève de ce groupe. Quelle est la probabilité que cet élève soit :

a. Interne admis ? **b.** Externe ? **c.** Non admis ?

d. Externe non admis ? **e.** Externe ou non admis ?

2. On rencontre par hasard un interne. Quelle est la probabilité qu'il soit admis ?

3. On rencontre par hasard un élève non admis. Quelle est la probabilité qu'il soit externe ?

Exercice 13

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie usuelle présentant deux côtés : pile ou face. On obtient ainsi une suite « ordonnée » de trois résultats (par exemple « pile, pile, face » sera noté $(P;P;F)$).

1. Écrire tous les résultats possibles de cette épreuve aléatoire (on pourra utiliser un arbre).

2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Les trois résultats sont identiques ».

3. Calculer la probabilité de l'événement B : « La suite des trois résultats commence par pile ».

4. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$. En déduire celle de l'événement $A \cup B$.

Exercice 14

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux.
Calculer la probabilité des événements :

1. A : « Ils auront trois filles ».

2. B : « Ils auront trois enfants de même sexe ».

3. C : « Ils auront au plus une fille ».

4. D : « Les trois enfants ne seront pas du même sexe ».

Exercice 15

Un bureau de poste possède deux guichets A et B dont l'un des deux au moins est ouvert.
On considère les événements E et F suivants :

E : « Le guichet A est ouvert ».

F : « Le guichet B est ouvert ».

Une étude statistique a montré que $P(E)=0,8$ et $P(F)=0,5$.
Un client se présente au bureau de poste.

1. Quelle est la probabilité que l'un au moins des guichets soit ouvert ?

2. Calculer la probabilité que les deux guichets soient ouverts.

Exercice 16

La probabilité dans une population qu'un individu possède un caractère génétique A est de $0,8$ et un caractère génétique B est de $0,6$. La probabilité qu'il possède les deux caractères est de $0,45$. Calculer la probabilité qu'il ne possède aucun des deux caractères.

Exercice 17

Un joueur lance deux dés tétraédriques équilibrés.

1. On définit la variable aléatoire X égale à la somme des deux résultats.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de X.

2. On décide de jouer au jeu suivant : si le nombre obtenu est multiple de 3, le joueur gagne, sinon il perd. En utilisant la variable aléatoire X, déterminer la probabilité que le joueur gagne.

Exercice 18

Un sac contient un jeton marqué « 1 » et un jeton marqué « 2 ». On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage et on fait la somme des deux nombres obtenus. Cette somme définit une variable aléatoire S.

1. Déterminer l'ensemble Ω des issues de cette expérience, puis l'ensemble des valeurs prises par S.

2. Quel est l'événement de Ω associé à l'événement $S=3$?

Exercice 19

On considère l'expérience qui consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés. On définit la variable aléatoire X égale au produit des deux résultats obtenus.

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 20

On considère à nouveau l'expérience qui consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés. On définit la variable aléatoire X égale à 1 si les nombres obtenus sont premiers entre eux, à 0 sinon. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

Exercice 21

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de caisses en service à l'ouverture d'un supermarché. La loi de X est donnée par le tableau ci-contre.

Déterminer le réel m, puis calculer $P(X \geqslant 3)$.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$0,2$	$0,3$	$0,3$	$0,1$	m

Exercice 22

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire dans le tableau ci-contre. Déterminer les réels p_1, p_2, p_3 et p_4 sachant qu'ils sont en progression arithmétique de raison $0,1$.

x_i	1	2	3	4
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

Exercice 23

On lance deux fois consécutivement un dé tétraédrique équilibré. Si on obtient deux résultats identiques, on marque 1 point, sinon on marque 0 point.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de points marqués.

Exercice 24

Un jeu comporte huit cartes marquées 7, 8, 9, 10, V, D, R et As. On tire une carte au hasard. La variable aléatoire X prend la valeur 10 si l'on tire 7, 8, 9 ou 10 ; la valeur 15 pour V, D ou R et la valeur 20 pour l'As. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

Exercice 25

Une urne contient dix boules bleues, sept boules rouges, deux boules vertes, une boule jaune. Un joueur tire au hasard une boule de l'urne et note sa couleur : B (bleue), R (rouge), V (verte), J (jaune).
Il gagne 1 euro s'il tire une boule rouge, 2 euros s'il tire une boule verte, mais perd 3 euros s'il tire la boule jaune. Il ne gagne et ne perd rien s'il tire une boule bleue.
Soit G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur lors d'une partie.
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $(G > 0)$.

Exercice 26

Le joueur joue au même jeu que celui de l'exercice précédent, mais cette fois-ci cela se passe au Japon, où le taux du yen est de 108 yens pour un euro. Il doit, de plus, payer 100 yens pour jouer. Cette mise de départ ne lui est remboursée dans aucun cas.
1. Exprimer la variable aléatoire Y donnant le gain du joueur en yens en fonction de la variable G de l'exercice précédent.
2. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

Exercice 27

On prend un jeu constitué de 32 cartes.
Si la carte tirée est un as, on gagne 3 jetons ; si c'est un cœur, on gagne 2 jetons ; pour toutes les autres cartes, on perd un jeton. Ces gains se cumulent si la carte tirée répond à plusieurs critères.
On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque carte le gain en jetons correspondant.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 28

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
1. On appelle X la variable aléatoire qui associe au lancer réalisé le produit des nombres obtenus. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
2. On appelle Y la variable aléatoire qui associe au lancer réalisé la distance entre les deux nombres obtenus. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre Y.
3. On appelle Z la variable aléatoire qui associe au lancer réalisé le PGCD des deux nombres obtenus. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre Z.

Exercice 29

On écrit les lettres du mot MATHS sur cinq cartons. On met ces cartons dans une boîte et on prélève au hasard trois cartons en remettant à chaque fois le carton dans la boîte. On appellera « mot » une succession de trois lettres, ayant un sens ou non.

1. Combien de « mots » différents peut-on obtenir ainsi ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir « AAA » ?
3. Quelle est la probabilité que le « mot » commence par A ?
4. On appelle V la variable aléatoire dénombrant le nombre de voyelles par « mot ». Déterminer la loi de probabilité de V.

Exercice 30

Le cycle d'allumage d'un feu tricolore est le suivant :
• feu vert pendant $20\,s$.
• feu orange pendant $5\,s$.
• feu rouge pendant $35\,s$.
Un physicien, habitant près du feu, note que les longueurs d'onde associées au vert, à l'orange et au rouge sont respectivement de 550, 600, et 750 nanomètres. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la longueur d'onde d'un feu à un instant choisi au hasard.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 31

Un sac contient quatre cartons numérotés 1, 2, 3 et 4. On tire au hasard deux cartons dans le sac.
1. Montrer que le tirage possède six issues équiprobables.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage la somme des valeurs inscrites sur les deux cartons tirés.
3. Déterminer $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant 4)$ et interpréter ce nombre.

Exercice 32

Un jeu consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
Chaque sortie de pile P rapporte 3 points, chaque sortie de face F fait perdre 2 points.
On considère la variable aléatoire X égale au nombre (positif ou négatif) de points obtenus après les trois lancers.
1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X et la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, la variance $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ et l'écart type $\sigma(\mathrm{X})$.

Exercice 33

On considère la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$	p	q	$0,5$	$0,1$

1. Calculer p et q sachant que l'espérance de cette variable aléatoire est égale à $2,6$.
2. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire.

Exercice 34

On augmente les valeurs du tableau de l'exercice précédent de 50% en gardant les mêmes probabilités. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la nouvelle variable aléatoire ainsi définie.

Exercice 35

On lance un dé cubique équilibré et on définit deux règles du jeu.
1. Si la face supérieure est 1, 2 ou 3, on perd 2€, sinon on gagne 4€.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer $E(X)$.
2. Si la face supérieure est 6, on gagne 11€, sinon on perd 1€.
Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer $E(Y)$.

Exercice 36

Pour distribuer les places aux exposants lors d'un marché nocturne, un tirage au sort est organisé par la municipalité. Les emplacements sont numérotés de 1 à 20. Trois emplacements mesurent 5 mètres de large, huit emplacements mesurent 3 mètres de large et les emplacements restant mesurent 2 mètres de large. On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque emplacement sa largeur.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.
3. Interpréter l'espérance de la loi de probabilité de X.

Exercice 37

Un joueur lance un dé à six faces qui a été truqué de la façon suivante :
• la probabilité de sortie du 6 est le double de celle obtenue dans le cas d'équiprobabilité ;
• les probabilités de sortie des cinq autres résultats sont égales.
On appelle X la variable aléatoire égale au résultat sorti.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quel est le résultat dont la sortie est la plus probable ? Expliquer.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 38

Un joueur lance un dé à six faces qui a été truqué de la façon suivante :
• la probabilité de sortie du 6 est égale à $\frac{1}{2}$;
• les probabilités de sortie des autres résultats sont identiques.
On appelle X la variable aléatoire égale au résultat sorti.
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer $E(X)$.

Exercice 39

Une roulette de casino comporte 37 cases, numérotées de 0 à 36. On fait tourner la roulette et on annonce le numéro qui est sorti. Tous les numéros ont la même probabilité de sortir.
1. Un joueur mise sur un des numéros. On dit qu'il fait un plein.
Si ce numéro sort, il récupère 35 fois sa mise plus sa mise. Sinon, il perd sa mise au profit du casino. Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
2. Cette fois, le joueur mise sur deux numéros. On dit qu'il fait un cheval.
Si un des numéros choisis sort, le joueur récupère 17 fois sa mise plus sa mise. Sinon, il la perd.
Quelle est l'espérance de gain du joueur ? (On pourra faire un tableau à double entrée pour déterminer les probabilités)

Exercice 40

Les assurances sont un des domaines dans lequel le calcul des probabilités est le plus essentiel. Dans ce secteur en expansion, de très nombreuses opportunités s'offrent à celui ou celle qui a le goût des mathématiques, avec des formations qui vont de bac+2 à bac+5 et au-delà.
Dans le quartier de la Défense à Paris, les principales compagnies d'assurance tiennent à montrer leur puissance par le gigantisme et l'audace des tours qu'elles font construire.
Un homme de 30 ans veut contracter une police d'assurance de 100000€ valable un an. En se basant sur les tables de mortalité, la compagnie a déterminé que la probabilité qu'un homme de 30 ans meure dans l'année qui suit est égale à $0{,}00177$.
Quelle somme doit-elle demander au client pour sa police d'assurance, si elle veut espérer faire un bénéfice de 50 euros ?

Exercice 41

Un client intente un procès qui, s'il le gagne, lui rapportera la somme de 100000€.
Il a le choix entre deux avocats. Le premier réclame des honoraires fixes de 12000€. Le second réclame 30% de la somme si le procès est gagné et rien sinon. Chacun des deux avocats assure que le client a 75% de chances de gagner le procès.
En se basant sur l'espérance de gain dans chaque cas, conseiller le client dans son choix de l'avocat.

Problèmes

Problème 1 *...Avec remise...*

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.
Une urne contient huit boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire avec remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5€ et pour chaque boule noire tirée, il perd 10€.
On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par G.
3. Déterminer la loi de probabilité de G.
4. Déterminer, en fonction de n, l'espérance de G.
5. Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

Problème 2 *...Sans remise...*

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.
Une urne contient huit boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire sans remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5€ et pour chaque boule noire tirée, il perd 10€.
On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par G.
3. Déterminer la loi de probabilité de G.
4. Déterminer, en fonction de n, l'espérance de G.
5. Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

Problème 3 *...Étude d'une espérance...*

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x_i	-2	0	1	5
$P(X=x_i)$	$0,2$	$0,6$	$0,1$	$0,1$

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit x un réel et Y la variable aléatoire définie par $Y=(X-x)^2$.
a. Déterminer la loi de probabilité de Y.
b. Exprimer $E(Y)$ en fonction de x.
c. Pour quelle valeur de x le résultat $E(Y)$ est-il minimal ?
d. Calculer la valeur de ce minimum.

Problème 4 *...Dé tétraédrique...*

Mei lance un dé tétraédrique équilibré jusqu'à obtenir la face numérotée 4.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués pour obtenir le 4.
1. Quelle(s) valeur(s) peut prendre X ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle doive faire deux lancers pour obtenir 4 ?
3. Déterminer $P(X=k)$ pour chacune des valeurs de k.

Problème 5 *...Dés cubiques...*

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

Partie A

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.
1. Calculer la probabilité qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'événement C : « À l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité que les deux faces soient vertes ?

Partie B

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.
Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B et
• Si la face obtenue est verte, on lance de nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenu ;
• Si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.
1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
3. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?