

Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1

On considère deux événements A et B tels que : $P(A)=0,7$, $P(B)=0,4$ et $P(A \cap B)=0,2$.

1. Calculer $P(A \cup B)$.
2. Calculer $P(\bar{A})$.
3. C est un événement tel que B et C sont incompatibles et $P(C)=0,3$.
Calculer $P(B \cup C)$.

Exercice 2

Soit A et B deux événements incompatibles tels que $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,2$.

Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 3

Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 3 à la fois à la pêche et à la lecture. On choisit au hasard une personne du groupe.

1. Calculer la probabilité qu'elle s'intéresse à la pêche ou à la lecture.
2. Calculer la probabilité qu'elle ne s'intéresse ni à la pêche, ni à la lecture.

Exercice 4

Le tableau suivant indique les résultats d'un groupe d'élèves à un examen en fonction de leur qualité d'interne ou d'externe.

	interne	externe
admis	58	212
non admis	40	75

1. On rencontre par hasard un élève de ce groupe. Quelle est la probabilité que cet élève soit :
 - a. Interne admis ?
 - b. Externe ?
 - c. Non admis ?
 - d. Externe non admis ?
 - e. Externe ou non admis ?
2. On rencontre par hasard un interne. Quelle est la probabilité qu'il soit admis ?
3. On rencontre par hasard un élève non admis. Quelle est la probabilité qu'il soit externe ?

Exercice 5

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

1. A : « Ils auront trois filles ».
2. B : « Ils auront trois enfants de même sexe ».
3. C : « Ils auront au plus une fille ».
4. D : « Les trois enfants ne seront pas du même sexe ».

Exercice 6

La probabilité dans une population qu'un individu possède un caractère génétique A est de $0,8$ et un caractère génétique B est de $0,6$. La probabilité qu'il possède les deux caractères est de $0,45$. Calculer la probabilité qu'il ne possède aucun des deux caractères.

Exercice 7

Un bureau de poste possède deux guichets A et B dont l'un des deux au moins est ouvert.

On considère les événements E et F suivants :

E : « Le guichet A est ouvert ».

F : « Le guichet B est ouvert ».

Une étude statistique a montré que $P(E)=0,8$ et $P(F)=0,5$.

Un client se présente au bureau de poste.

1. Quelle est la probabilité que l'un au moins des guichets soit ouvert ?

2. Calculer la probabilité que les deux guichets soient ouverts.

Exercice 8

Soit A et B deux événements de l'univers d'une épreuve aléatoire. Compléter le tableau suivant (arrondir si nécessaire à 10^{-3} près).

P(A)	P(B)	$P_B(A)$	$P_A(B)$	$P(A \cap B)$
0,15	0,3	0,45		
0,42		0,26		0,18
		0,4	0,34	0,26
0,38	0,16		0,2	
0,25		0,4	0,3	
	0,2	0,35	0,45	

Exercice 9

1. A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B)=0,4$, $P(A \cup B)=0,7$ et $P_A(B)=0,8$.

Calculer $P(A)$ et $P(B)$. En déduire la probabilité de A sachant B.

2. C et D sont deux événements tels que $P(C)=0,6$, $P_C(D)=0,4$, $P_D(C)=0,5$. Calculer $P(D \cap C)$ et $P(D)$. En déduire la probabilité de la réunion des événements C et D.

3. E et F sont deux événements tels que $P(E)=0,8$ et $P_E(F)=0,75$. Calculer $P(E \cap \bar{F})$.

Exercice 10

On considère deux événements A et B tels que $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ et $P_A(B)=\frac{1}{2}$.

Calculer $P_B(A)$.

Exercice 11

Dans une classe de terminale, 98% des élèves possèdent un téléphone portable. Parmi eux, 75% ont une connexion internet associée à leur téléphone. On choisit un élève au hasard dans cette classe.

Quelle est la probabilité que cet élève ait un téléphone portable et une connexion internet associée ?

Exercice 12

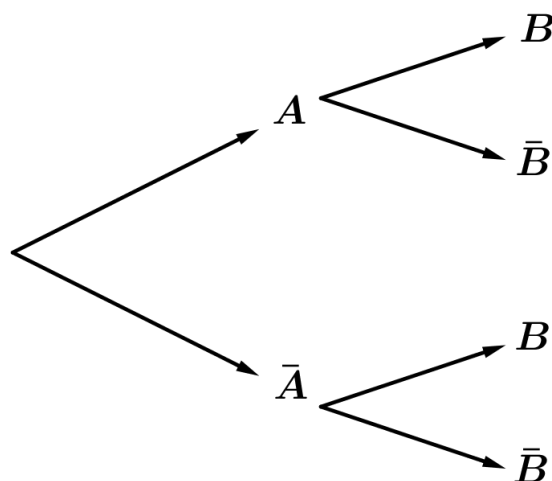
Pour une revue locale, un journaliste doit réaliser un reportage sur un club de natation composé de 30 membres : 27 nageurs dont 10 spécialistes de la nage crawlée et 3 entraîneurs. Le journaliste interroge au hasard un des membres de ce club.

Quelle est la probabilité qu'il interviewe un nageur non spécialiste de la nage crawlée ?

Exercice 13

A et B sont deux événements. On sait que : $P(A)=0,35$, $P_A(B)=0,42$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})=0,18$.

1. Recopier l'arbre ci-dessous et placer les trois valeurs de l'énoncé.



2. Compléter l'arbre pondéré avec les probabilités manquantes.

Exercice 14

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millièmes. À la session 2009 du baccalauréat, 286762 élèves inscrits en série générale ont été admis. En particulier, 47765 en série L , 90446 en ES et 148531 en série S . Le tableau suivant présente la proportion (en pourcentage) de bacheliers ayant obtenu une mention.

	Mention AB	Mention B ou TB
Série L	27,3	16,1
Série ES	28,8	15,3
Série S	29,2	30,9

On interroge au hasard un bachelier en série générale de cette session 2009.

1. Construire l'arbre pondéré traduisant la situation. Cet arbre est à compléter au fur et à mesure.
2. Quelle est la probabilité que ce bachelier n'ait pas eu de mention sachant qu'il était en série L ?
3. Reprendre la question précédente avec la série ES et la série S .
4. En déduire la probabilité qu'un bachelier interrogé au hasard n'ait pas obtenu de mention.
5. Quelle est la probabilité qu'un bachelier interrogé au hasard ait obtenu la mention B ou TB ?

Exercice 15

À la fin d'une séance de cours, le professeur de mathématiques donne l'exercice suivant à préparer pour le lendemain : « Une urne contient 5 boules de couleur rouge et 15 boules de couleur verte ».

On tire au hasard successivement deux boules dans cette urne. La probabilité que les deux boules soient de couleur rouge est de $\frac{1}{19}$. Représenter la situation par un arbre pondéré. Calculer la

probabilité qu'au moins une des deux boules soit de couleur verte ».

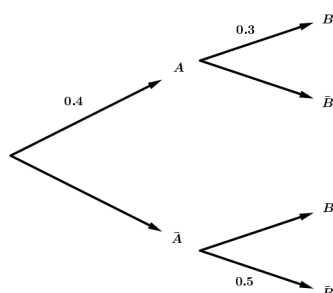
Le lendemain, l'élève interrogé dit : « Je n'ai pas fait l'exercice : je ne sais pas si le tirage est avec ou sans remise ».

1. Qu'en pensez-vous ?
2. Répondre alors aux questions posées par le professeur.

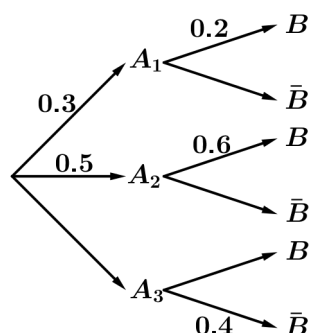
Exercice 16

Dans chacun des cas, avec les données figurant sur l'arbre pondéré, calculer $P(B)$.

a.



b.

**Exercice 17**

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province. Une enquête est faite auprès des 1200 employés de l'entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion et le bus).

Les résultats de l'enquête sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Bus	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On note les événements suivants :

F : « L'employé est une femme »

T : « L'employé choisit le train »

1. Calculer les probabilités $P(F)$ et $P(T)$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train.
2. Expliquer ce que représente $F \cap T$ puis calculer sa probabilité.
3. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme.

Exercice 18

Pour chaque tournoi du grand chelem, les performances des meilleurs joueurs sont étudiées, puis décrites dans une rubrique appelée *statistiques*. En 2011, lors du tournoi de Roland Garros, les statistiques du Serbe Novak Djokovic étaient les suivantes :

- Sur 447 balles de 1^{er} service, 305 ont été jouées. Parmi ces 305 échanges engagés, il a gagné le point 229 fois.

- Sur les 142 balles de 2^e service, il a perdu 48 fois le point (éventuellement par une double faute)

1. Préciser les fréquences observées lors de ce tournoi des points perdus suite aux échanges engagés au premier service, et des points gagnés suite aux échanges engagés au deuxième service.
2. Construire un arbre pondéré représentant les différentes éventualités de Djokovic au service.
3. Quelle est la probabilité qu'il engage l'échange au 1^{er} service et qu'il perde le point ?
4. Quelles est la probabilité qu'il gagne le point sachant qu'il a engagé l'échange au 2^e service ?
5. Quelle est la probabilité qu'il gagne le point ?
6. Quelle est la probabilité qu'il fasse un jeu blanc (4 points gagnés sans que son adversaire ait marqué un seul point) ?

Exercice 19

Dans chacun des cas suivants, dire si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A)=0,2$, $P(B)=0,8$ et $P(A \cap B)=0,9$.
2. $P(A)=0,4$, $P(B)=0,8$ et $P(A \cap B)=0,32$.
3. $P(A)=0,5$, $P(B)=0,3$ et $P(A \cup B)=0,65$.
4. $P(A)=0,48$, $P(B)=0,25$ et $P(A \cap B)=0$.

Exercice 20

Une association propose différentes activités à ses 96 adhérents, dont l'aviron et le badminton. Douze membres s'inscrivent pour l'aviron, trente-deux pour le badminton, dont quatre pour les deux. On prend au hasard la fiche d'un adhérent et on considère les événements suivants :

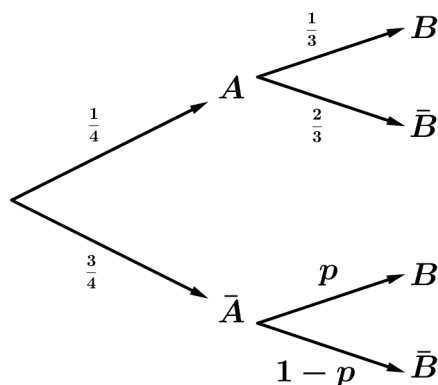
A : « L'adhérent est inscrit à l'aviron » ;

B : « L'adhérent est inscrit au badminton ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. En est-il de même pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$?

Exercice 21

A et B sont deux événements relatifs à une expérience aléatoire représentée par l'arbre suivant :



Comment choisir la valeur de p pour que les événements A et B soient indépendants ?

Exercice 22

A et B sont deux événements indépendants relatifs à une même expérience aléatoire tels que $P(A) < P(B)$, $P(A \cap B)=0,4$ et $P(A \cup B)=0,9$. Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

Exercice 23

On considère deux événements A et B tels que $P(A)=p$, $P(B)=P(\bar{A})$ et $P(A \cap B)=0,2p+0,15$.

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{R}$: $-p^2+0,8p-0,15=(0,3-p)(p-0,5)$.
2. Trouver la probabilité p telle que A et B soient indépendants.

Exercice 24

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements sont indépendants.

1. A : « Tirer un roi » et B : « Tirer une carte rouge ».
2. A : « Tirer un roi » et B : « Ne pas tirer un as ».
3. A : « Tirer un roi ou tirer une dame rouge » et B : « Tirer une carte rouge ».

QCM

Pour chaque question, indiquer la ou les bonne(s) réponse(s).

On note N l'événement « Un candidat se présente pour la 1^{ère} fois à l'épreuve pratique du permis de conduire » et R l'événement « Un candidat est reçu à l'issue de l'épreuve pratique du permis de conduire ». On admet $P(R)=0,527$ et $P(R \cap N)=0,292$.

1. La probabilité qu'un candidat ne soit pas reçu à l'issue de l'épreuve pratique de conduite est :
a. 0,819 b. 0,473 c. 0,708 d. 0,512
2. La probabilité qu'un candidat soit reçu à l'issue de l'épreuve pratique de conduite et qu'il ne s'agisse pas de sa première tentative est :
a. 0,708 b. 0,635 c. 0,235 d. 0,181
3. La probabilité qu'un candidat se soit présenté pour la première fois à l'épreuve pratique de conduite sachant qu'il a été reçu est :
a. 0,691 b. 0,554 c. 0,154 d. 0,446
4. Un candidat a été reçu à l'issue de l'épreuve pratique de conduite. La probabilité qu'il ne s'agisse pas de sa première tentative est :
a. 0,691 b. 0,554 c. 0,154 d. 0,446

Un magasin a commandé un modèle de tablette électronique auprès de trois fournisseurs. 60% des tablettes ont été commandées au fournisseur A, 30% au fournisseur B et le reste au fournisseur C. Quelques mois après la vente de ces tablettes, le service après-vente affirme que 2% des tablettes du fournisseur A et 5% des tablettes du fournisseur B sont défectueuses. Aucune tablette n'est défectueuse pour le fournisseur C. On choisit au hasard un client qui a acheté une tablette.

5. La probabilité que cette tablette provienne du fournisseur C est :
a. 0,1 b. 0,3 c. 0,6 d. 1
6. La probabilité que la tablette provienne du fournisseur A et qu'elle ne soit pas défectueuse est :
a. 0,012 b. 0,015 c. 0,285 d. 0,588
7. La probabilité que cette tablette ne soit pas défectueuse est :
a. 0,973 b. 0,873 c. 0,688 d. 0,385

Dans un sac, Jade a mis 3 jetons rouges, 2 jetons jaunes et un jeton vert. Après avoir misé, Sofiane doit tirer un par un les jetons dans le sac tant que le jeton vert n'est pas sorti (tirage sans remise).

8. La probabilité que Sofiane tire le jeton vert lors du 3^e tirage est :
a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{5}{6}$ d. $\frac{2}{3}$
9. Sofiane peut récupérer dix fois sa mise s'il tire les 3 jetons rouges, puis les deux jetons jaunes et enfin le jeton vert dans cet ordre. La probabilité d'un tel tirage est :
a. $\frac{1}{30}$ b. $\frac{1}{40}$ c. $\frac{1}{50}$ d. $\frac{1}{60}$

Problèmes

Problème 1 ...Concours...

Les statistiques dressées à partir des résultats de la session de mai 2013 ont permis d'établir que:

- 60% des personnes qui présentaient le concours le présentaient pour la première fois ;
- 10% de ceux qui le présentaient pour la première fois ont été admis ;
- 40% de ceux qui le présentaient pour la seconde fois l'ont réussi.

On interroge au hasard une personne parmi toutes celles ayant passé ce concours en mai 2013. On note :

- C_1 l'événement : « La personne présentait le concours pour la première fois » ;
- R l'événement : « La personne a été reçue à ce concours ».

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de l'événement A .

1. Déterminer les probabilités suivantes : $P_{C_1}(R)$; $P_{\bar{C}_1}(R)$ et $P(C_1)$.

Aucune justification n'est attendue.

2. Déterminer la probabilité que cette personne se soit présentée au concours pour la première fois et ait été admise.

3. Montrer que la probabilité que cette personne ait été admise à ce concours en mai 2013 est de 0,22.

4. Sachant que cette personne a réussi le concours, déterminer la probabilité qu'elle l'ait présenté pour la première fois. Donner une valeur arrondie au centième.

Problème 2 ...Représentation en CPGE...

Les étudiants des CPGE se répartissent en trois filières :

- La filière scientifique (S) accueille 61,5% des étudiants ;
- La série économique et commerciale (C) accueille 24% des étudiants ;
- Les autres étudiants suivent une filière littéraire (L).

Document 2 : « En classes littéraires, la prépondérance des femmes semble bien implantée : avec trois inscrites sur quatre, elles y sont largement majoritaires. Inversement, dans les préparations scientifiques, les filles sont présentes en faible proportion (30%) alors qu'on est proche de la parité dans les classes économiques et commerciales. »

On considère que parmi tous les inscrits en CPGE en 2009/2010, la proportion de fille est 42,7%.

On interroge au hasard un étudiant en CPGE. On considère les événements suivants :

- F : « L'étudiant interrogé est une fille » ;
- S : « L'étudiant interrogé est inscrit dans la filière scientifique » ;
- C : « L'étudiant interrogé est inscrit dans la filière économique et commerciale » ;
- L : « L'étudiant interrogé est inscrit dans la filière littéraire ».

1. Donner les probabilités $P(S)$, $P(C)$, $P_L(F)$, $P_S(F)$ et $P(F)$.

Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure.

2. a. Calculer la probabilité que l'étudiant interrogé au hasard soit une fille inscrite en L .

b. Calculer la probabilité de l'événement $F \cap S$.

c. En déduire que la probabilité de l'événement $F \cap C$ est 0,13375.

3. Sachant que l'étudiant interrogé suit la filière C , quelle est la probabilité qu'il soit une fille ? On arrondira le résultat au millièm. Confronter ce résultat avec les informations du document 2.

4. Sachant que l'étudiant interrogé est une fille, quelle est la probabilité qu'elle soit inscrite dans la filière littéraire L ? On arrondira le résultat au millièm.

Problème 3 ...Asthme...

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation. En France, les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4% des hommes et 5% des femmes sont asthmatiques. Dans la population française, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

On appelle :

- A : « Aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »
- B : « Un seul des deux adultes du couple est asthmatique »
- C : « Les deux adultes du couple sont asthmatiques »

On admet que $P(A)=0,912$, $P(B)=0,086$ et $P(C)=0,002$.

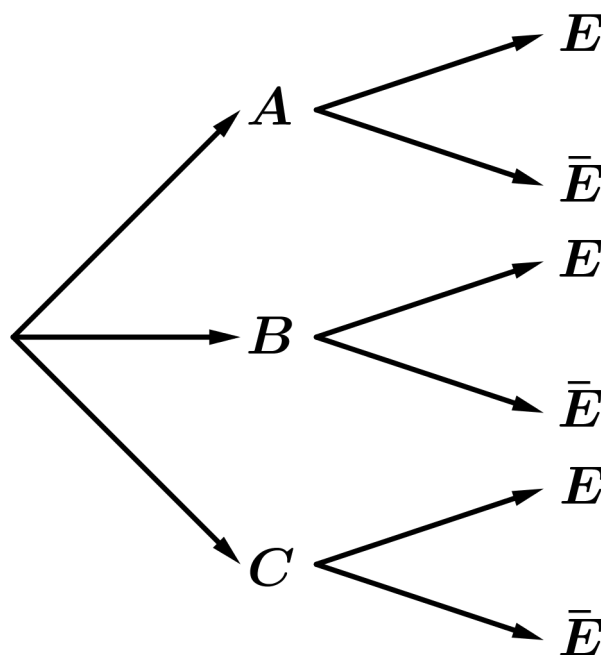
On souhaite étudier la transmission de l'asthme au premier enfant.

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'événement : « Le premier enfant du couple est asthmatique ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Montrer que $P(E)=0,118$.

3. Calculer $P_E(A)$ et interpréter le résultat. En déduire $P_E(\bar{A})$ et interpréter le résultat.

4. Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatique ?

Aide : On pourra chercher à calculer la probabilité de l'événement contraire.