

Fonction exponentielle

Exercice 1

Calculer la dérivée de chacune des fonctions f suivantes :

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x) = \exp(x) + 1$; | 2. $f(x) = \exp(x) + 2x$; | 3. $f(x) = x^2 - \exp(x)$; |
| 4. $f(x) = 5\exp(x)$; | 5. $f(x) = 2x\exp(x)$; | 6. $f(x) = x^2\exp(x)$; |
| 7. $f(x) = \frac{2\exp(x)}{x}$; | 8. $f(x) = -\exp(x)$; | 9. $f(x) = \frac{x}{\exp(x)}$. |

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\exp(3) \times \exp(5)$; | 2. $\frac{\exp(5)}{\exp(2)}$; | 3. $\exp(-7) \times \exp(2)$; |
| 4. $\exp(3x) \times \exp(2x)$; | 5. $\exp(-x) \times \exp(x)$; | 6. $\exp(-x) \times \exp(-x)$; |
| 7. $\exp(x) \times \exp(2x)$; | 8. $\exp(-2x) \times \exp(4x)$; | 9. $\frac{\exp(x+2)}{\exp(x)}$; |
| 10. $\exp(5-2x) \times \exp(-2x)$; | 11. $\exp(4x) \times \exp(-x-2)$; | 12. $\frac{\exp(-3x)}{\exp(-2x)}$; |
| 13. $\frac{\exp(-3+x)}{\exp(x+1)}$; | 14. $\exp(-3x-1) \times \exp(-2-x)$. | 15. $\frac{\exp(2+x)}{\exp(3x-5)}$. |

Exercice 3

Établir l'égalité suivante pour tout réel x : $\frac{2}{1+\exp(x)} = 2 - \frac{2}{1+\exp(-x)}$.

Exercice 4

Écrire chacune des expressions suivantes en utilisant la notation e^x :

- | | | | |
|-----------------|--------------------|----------------------------------|--|
| 1. $\exp(2x)$; | 2. $(\exp(x))^3$; | 3. $\frac{\exp(x+2)}{\exp(x)}$; | 4. $\frac{\exp(-x)\exp(2x)}{\exp(3x)}$. |
|-----------------|--------------------|----------------------------------|--|

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

- | | | | |
|-----------------------------------|--|------------------------------|--|
| 1. $e^{-5} \times e^3$; | 2. $(e^3)^2 \times e^2$; | 3. $\frac{e^5}{e^2}$; | 4. $\frac{e^{-5}}{e^3}$; |
| 5. $\frac{e^3 \times e^5}{e^2}$; | 6. $\frac{e^{-4} \times e^3}{e^{-1} \times e^5}$; | 7. $e^{-2} \times (e^2)^3$; | 8. $\frac{e^2 \times e^{-3}}{e^3 \times e^{-2}}$. |

Exercice 6

Simplifier les expressions données pour tout réel x :

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------------------|--|--|
| 1. $e^x \times e^{-2x}$; | 2. $(e^x)^2 \times e^{-x}$; | 3. $e^{2x} \times e^{-2x}$; | 4. $(e^x)^2 \times (e^{-x})^3$; |
| 5. $e^{x+2} \times e^{-x}$; | 6. $e^{x+1} \times e^{3-x}$; | 7. $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2$; | 8. $(e^{1-x})^2 \times e^{2x}$; |
| 9. $\frac{e^{-3x+1}}{e^{2x}}$; | 10. $\frac{e^{2x-3}}{e^{3-x}}$; | 11. $\frac{e^{x-2} \times e^{3x}}{e^{1-2x}}$; | 12. $\frac{e^{-2x} \times e^{5x}}{e^{-3x} \times e^{-4x}}$. |

Exercice 7Simplifier les expressions données pour tout réel x :

1. $(e^x)^3 e^{-2x}$;
2. $\frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$;
3. $\frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$;
4. $\sqrt{\frac{20e^{5x}}{5e^{-4x}}}$;
5. $e^{-3x} e^{3x}$;
6. $e^{2x+1} e^{-4x-3}$;
7. $\sqrt{\frac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}}$;
8. $(e^x)^5 e^{-2x}$;
9. $\frac{e^{2x} e^{-4x}}{e^{3x+1}}$;
10. $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$;
11. $\frac{e^{-x+2} e^{-2x-1}}{e^{3x+2} e^{-x-1}}$;
12. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$.

Exercice 8Démontrer pour tout réel x les égalités suivantes :

1. $\frac{e^{-x}}{e^x + 1} = \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$;
2. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$;
3. $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$;
4. $\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = e^x \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$;
5. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$;
6. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$;
7. $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$;
8. $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$.

Exercice 9Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.Calculer $f(-x)$ puis comparer avec $f(x)$. Qu'en déduit-on ?**Exercice 10**Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = e^x$;
2. $f(x) = -3e^x$;
3. $f(x) = x + e^x$;
4. $f(x) = (0,4x - 2)e^x$;
5. $f(x) = (x + 1)^2 e^x$;
6. $f(x) = x^2 e^x$;
7. $f(x) = 2x - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$;
8. $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$;
9. $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 3}$;
10. $f(x) = e^x - 3x - 1$;
11. $f(x) = xe^x - 1$;
12. $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$.

Exercice 11Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(e^x)^3 = e^{x-1}$;
2. $e^x = 1$;
3. $e^{2x} = e$;
4. $e^x = e^{-x}$;
5. $e^{2x+1} = e^{\frac{5}{2}}$;
6. $(e^x)^2 = (e^{-x})^2 e^3$;
7. $\frac{e^{-x} - 3}{e^{-x} - 5} = \frac{1}{2}$;
8. $e^{6x} + 2e^{3x} - 3 = 0$;
9. $e^x + e^{1-x} - (e + 1) = 0$.

Exercice 12Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = -4$;
2. $(e^x - 3)^2 = 9$;
3. $2e^{2x} - e^x + 1 = 0$;
4. $e^{x^2-5} = e^{-4x}$;
5. $e^{x+1} \times e^{3x+5} = 1$;
6. $e^{2x+1} - 1 = 0$;
7. $(e^x)^2 = e^{5x+4}$;
8. $(e^{-x} - e)(e^{3x} + 5) = 0$;
9. $e^x - e^{-x} = 0$;
10. $e^{5x} = -1$;
11. $e^{\cos(x)} = e^{\frac{1}{2}}$;
12. $(e^2 - e^{3x})(1 - e^x) = 0$.

Exercice 13Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^x < 1$;
2. $4e^{2x} < 3e^x + 1$;
3. $e^{2x-1} > \sqrt{e}$;
4. $1 \leq e^{3x}$;
5. $e^{x+3} \geq \frac{1}{e^x}$;
6. $e^{-x} \leq e^x$;
7. $e^x < e^{-x} + 1$;
8. $(e^x)^2 \geq e^{-x-1}$;
9. $e^x > e$;
10. $e^{2x} \leq 1$;
11. $(e^x)^3 \leq \frac{1}{e}$;
12. $e^x - \frac{1}{e^x} > 0$.

Exercice 14Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\frac{2e^x + 3}{e^x + 3} < \frac{1}{2}$;
2. $(e^x)^2 \leq (e^{-x})^2$;
3. $(x+2)(e^x - 1) \geq 0$;
4. $\frac{e^{5x+3}}{e^{x-4}} \leq \frac{1}{e}$;
5. $e^{7-3x^2} > e^{2-2x}$;
6. $\frac{e^x + 3}{e^x + 1} > 2$;
7. $e^{-x^2} \leq e^{x-2}$;
8. $e^{x+3} - e^{x^2+x-1} \leq 0$;
9. $e^{-x-2} \leq \frac{1}{e^x}$.

Exercice 16

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme a . Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exercice 17

Donner la nature et la raison des suites ci-dessous :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^n$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-6n}$;
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{3n}$;
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^2 n$.

Exercice 18

Étudier le sens de variations des suites ci-dessous :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{5n}$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-n}$;
3. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{0,5} u_n$;
4. $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + e^{-2}$.

Exercice 19Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2+2} = \frac{e^{2x}}{e}$.

Exercice 20

Soit un entier naturel n non nul. On considère la somme $S = \sum_{k=0}^n e^k = 1 + e + e^2 + \dots + e^n$.

1. Démontrer que S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Déterminer S en fonction de n .
3. Pour quelle valeur de n la somme S va-t-elle dépasser un milliard ?

Exercice 21

Soit n un entier naturel. Déterminer une expression des sommes suivantes en fonction de n :

1. $S = \sum_{k=0}^n e^{2k} = 1 + e^2 + e^4 + \dots + e^{2n}$;
2. $S = \sum_{k=0}^n e^{0,5k} = 1 + e^{0,5} + e + e^{1,5} + \dots + e^{0,5n}$.

Exercice 22

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près des sommes suivantes :

1. $S = \sum_{k=0}^5 e^{2k} = 1 + e + e^4 + \dots + e^{10}$;
2. $S = \sum_{k=0}^{10} e^{0,01k} = 1 + e^{0,01} + e + e^{0,02} + \dots + e^{0,1}$.

Exercice 23

Étudier le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $x^2 e^x$;
2. $-3e^{5-x}$;
3. $(x+1)(e^x-1)$;
4. $x e^{-x^2+1}$;
5. $4e^{-x^2}$;
6. $e^{2x} - 3xe^{2x}$.

Exercice 24

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x) = e^{3x} - 3e^x$;
2. $f(x) = (0,4x-2)e^{-0,1x}$;
3. $f(x) = e^{-x^3}$;
4. $f(x) = e^{\frac{2x+1}{x+4}}$;
5. $f(x) = xe^{-x^2}$;
6. $f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}$;
7. $f(x) = x+1-3xe^{-x^2}$;
8. $f(x) = \frac{3e^x}{e^x-2}$;
9. $f(x) = x + (1-x)e^{2x}$.

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{e^{x-1} + 1}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f en $x=1$.

Exercice 26

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^x + x + 1$ et $g(x) = (x-1)e^x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g . En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.
2. Déterminer la dérivée de f et vérifier que $f'(x) = g(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f .

Problèmes**Problème 1** ...Équation de tangente...

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}(1-x)$.
b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.

Problème 2 ...Étude classique...

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)e^x + 1$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2-x)e^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
3. a. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
Montrer que T a pour équation $y = -e^3x + 3e^3 + 1$.
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.

Problème 3 ...Étude à l'aide d'une fonction auxiliaire...

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. Soit la fonction g définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2e^x - 1$.
Étudier le sens de variations de la fonction g et déterminer sa limite en $+\infty$. On dressera son tableau de variations.
2. On suppose qu'il existe un unique réel α dans $[0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
En déduire le signe de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

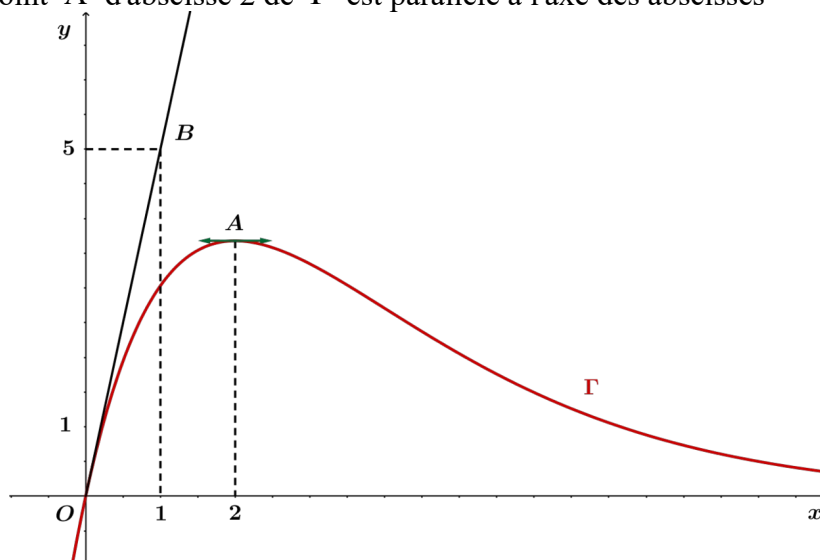
Partie B : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
3. En déduire le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}$.
5. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Problème 4 ...Des inconnues...

Le graphique ci-dessous donne, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de Γ d'une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur cet intervalle. On précise que :

- l'origine O du repère appartient à Γ
- la droite d passant par O et par le point B de coordonnées $(1; 5)$ est tangente en O à Γ
- la tangente au point A d'abscisse 2 de Γ est parallèle à l'axe des abscisses



- En utilisant le graphique et les renseignements donnés ci-dessus :
 - Préciser $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
 - Préciser le sens de variations de f . Dresser son tableau de variations.
- On suppose que la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, avec a , b et c des réels.
 - En utilisant $f(0)$, déterminer b .
 - Calculer $f'(x)$.
 - En utilisant $f'(0)$ et $f'(2)$, déterminer a et c .

Problème 5 ...Encore une étude à l'aide d'une fonction auxiliaire...**Partie A**

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

- Étudier les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer le signe de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
- En déduire que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

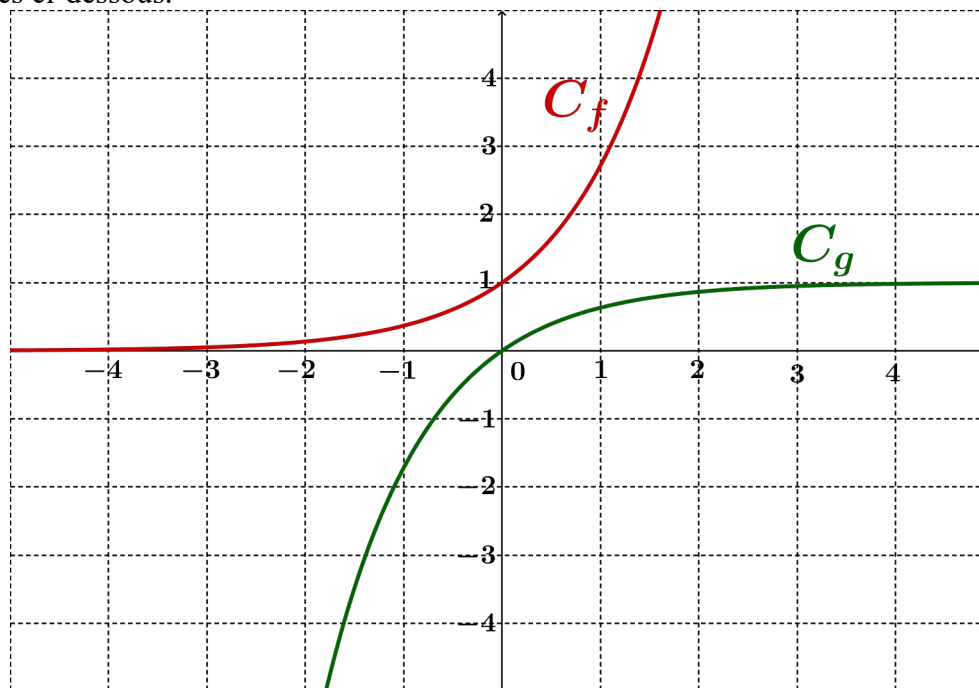
On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

- Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
- Soit D la droite d'équation $y = x$.
 - Montrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - Étudier la position relative de la droite D et de la courbe représentative de f sur $[0; 1]$.

Problème 6 ...Une histoire de tangentes...

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$ et $g(x)=1-e^{-x}$.

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthonormé du plan, notées C_f et C_g , sont données ci-dessous.

**Partie A**

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure ci-dessus.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note D l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b .

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A .
 b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B .
 c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = 2(x-1)e^x + 1$.

1. a. Calculer les limites de la fonction Φ en $-\infty$ et $+\infty$.
 b. Déterminer la dérivée de la fonction Φ , puis étudier son signe.
 c. Dresser le tableau de variations de la fonction Φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\Phi(0)$.

2. On suppose que l'équation $\Phi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

On note α la solution négative de l'équation $\Phi(x) = 0$ et β la solution positive de cette même équation. Donner une valeur approchée de $\Phi(-2)$ et $\Phi(1)$.

À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement de α et β à 10^{-3} près.

Problème 7 ...Chute d'une goutte d'eau...

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en $m.s^{-1}$, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie pour tout réel $t \geq 0$ par $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. La constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air. On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Cas général

- Déterminer les variations de la vitesse de la goutte.
- La goutte ralentit-elle au cours de la chute ?
- Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
- Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.

Partie B : Cas particulier

Dans cette partie, $m=6$ et $k=3,9$.

À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est $15 m.s^{-1}$.

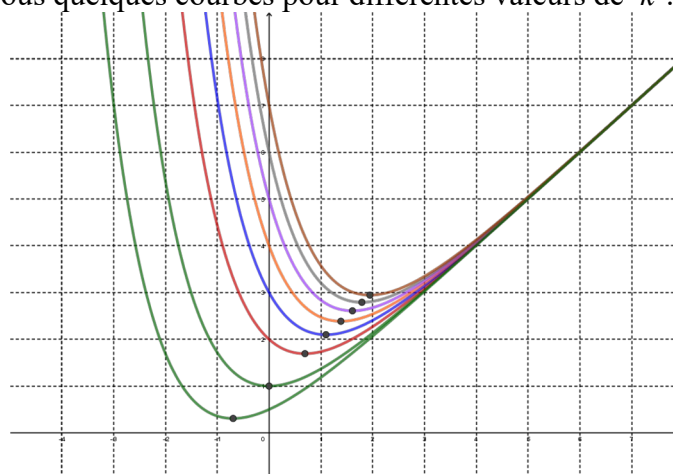
- Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondir à 10^{-1} près.
- En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de $m.s^{-1}$.

Problème 8 ...Vers la fonction logarithme...

Soit un réel $k > 0$. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + ke^{-x}$.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k . Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas ?