Annexe

Variables aléatoires

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

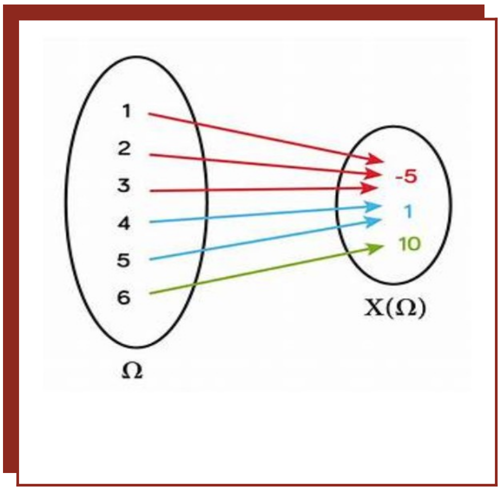
I.1 Variable aléatoire discrète

Définition 1

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .
Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.
• « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
• « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
• « Sinon, je gagne 10 jetons »
On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu.
On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.
On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



Remarque

En mathématiques, l'adjectif « discret » désigne les ensembles dont on pourrait énumérer les éléments. Ici, la variable aléatoire est « discrète », car elle prend un nombre fini de valeurs.

I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\{x_1;x_2;\ldots;x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1 \leqslant i \leqslant k$.

Définition 2

• L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
• L'événement « $X \geqslant x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i .

Remarque

De même, on définit « $X > x_i$ », « $X < x_i$ », et « $X \leqslant x_i$ ».

Définition 3

• La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i. On la note $P(X=x_i)$ ou p_i.
• La probabilité de l'événement « $X\geqslant x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre supérieurs ou égaux à x_i. On la note $P(X\geqslant x_i)$.

Définition 4

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $\{x_1;x_2;\dots;x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur x_i lui associe sa probabilité notée $P(X=x_i)$. On peut la représenter sous forme d'un tableau de valeurs :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbf{P(X=x_i)}$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\dots$	$P(X=x_n)$

Exemple

Dans le jeu de l'exemple précédent, chaque issue du lancer de dé est équiprobable, de probabilité $\frac{1}{6}$. Le gain est d'un jeton si le résultat obtenu est 4 ou 5. La probabilité correspondante est $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, d'où $P(X=1)=\frac{1}{3}$. On a de même $P(X=-5)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $P(X=10)=\frac{1}{6}$.
La loi de probabilité est résumée dans le tableau suivant :

$\boldsymbol{x_i}$	-5	1	10
$\mathbf{P(X=x_i)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Définition 5

$$p_1+p_2+\dots+p_n=\sum_{i=1}^{k}p_i=1 \text{ ou } P(X=x_1)+P(X=x_2)+\dots+P(X=x_n)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)=1 .$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a $\sum_{i=1}^{3}P(X=x_i)=P(X=-5)+P(X=1)+P(X=10)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

II. Espérance, variance et écart-type

Soit une variable aléatoire X définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
La variable aléatoire X prend les valeurs x_i , pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
La loi de probabilité de X associe à chaque valeur x_i la probabilité $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$.

Définition 6

L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ défini par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

Définition 7

La **variance** de la variable aléatoire X est le réel positif noté $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ défini par :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 = p_1 \left(x_1 - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 + p_2 \left(x_2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 + \ldots + p_n \left(x_n - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2$$

Définition 8

L'**écart-type** de la variable aléatoire X est définie comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}$$

Exemple

Dans l'exemple de l'expérience aléatoire précédente où X représente le gain, on obtient :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = -5 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{6} = -\frac{15}{6} + \frac{2}{6} + \frac{10}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{1}{2} \times \left(-5 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(10 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 29{,}25$$

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{29{,}25} \simeq 5{,}41$$

Remarques

• La loi des grands nombres nous permet d’interpréter l’espérance et l’écart-type de la loi de probabilité de X . Elle nous dit en effet qu’en répétant un grand nombre de fois l’expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l’espérance de la loi de probabilité de X . L’espérance est donc la moyenne que l’on peut espérer en répétant l’expérience un grand nombre de fois.
De même pour l’écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de X .
Pour le jeu proposé en exemple, l’espérance de $-0{,}5$ signifie que l’on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $0{,}5$ jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).
Mais avec une moyenne égale à $-0{,}5$, l’écart-type d’environ $5{,}41$ exprime le fait que le risque d’obtenir un gain négatif (une perte) est important.
• Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0$ alors on dit que le jeu est équitable.

Propriété 9 **Formule de König-Huygens**

On a $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-[E(X)^2]=p_1 x_1^2+p_2 x_2^2+\ldots+p_n x_n^2-[E(X)^2]$.

Démonstration

On a $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i^2-2x_i E(X)+E(X)^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i+E(X)^2\sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-2E(X)^2+E(X)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-E(X)^2$$

Définition 10

Soit a et b deux réels quelconques.
La variable aléatoire Y , dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX+b$.

Valeur de Y	ax_1+b	ax_2+b	...	ax_n+b
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n

On pose $Y=aX+b$.

Propriété 11

Soit X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels. Alors :
- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $V(aX)=a^2V(X)$
- $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

Démonstration

- $E(aX+b)=p_1\times(ax_1+b)+p_2\times(ax_2+b)+\ldots+p_k\times(ax_k+b)$

$$=a(p_1\times x_1+p_2\times x_2+\ldots+p_k\times x_k)+b(p_1+p_2+\ldots+p_k)$$

$$=aE(X)+b$$

- $V(aX+b)=\sum_{i=1}^{k} p_i(ax_i+b-E(aX+b))^2$

Avec la propriété précédente, on a $E(aX+b)=aE(X)+b$.
On factorise alors par a^2 dans chaque terme de la somme.
Je vous laisse le soin de finir la démonstration (ceci n'en étant que l'idée principale).
- $\sigma(aX+b)=\sqrt{V(aX+b)}=\sqrt{a^2V(X)}=|a|\sqrt{V(X)}=|a|\sigma(X)$