

Annexe

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

Théorème 1

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp**.

Démonstration

On admet l'existence d'une telle fonction. Montrons son unicité en deux étapes.

• On pose pour tout réel x , $h(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0.$$

La fonction h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$.

On en déduit de ce résultat que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

• Soit g la fonction qui vérifie les mêmes propriétés que f : $g = g'$ et $g(0) = 1$.

On définit la fonction k sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, ce qui est possible sur $\mathbb{R}$ d'après le premier

point. La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de telles fonctions sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0.$$

On en déduit que k est une fonction constante.

Or $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = 1$.

On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$. Donc la fonction f est unique.

Remarque

Ceci signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.

Par exemple, si un nombre vérifie $\exp(a) = 2$, alors le nombre dérivé en a vaut aussi 2.

Définition 2

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x)$ telle que $\exp(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

II. Propriétés algébriques

Propriété 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

Démonstration

Posons pour tout réel x , $h(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. La fonction h est dérivable en tant que produit de telles fonction sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$h'(x) = \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-1) \times \exp(-x) = \exp(x) \times \exp(-x) - \exp(x) \times \exp(-x) = 0.$$

On en déduit que h est constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = 1 \times 1 = 1$.

Ainsi, pour tout réel x , on a $h(x) = 1$, c'est-à-dire $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

Propriété 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration

On utilise un raisonnement par l'absurde.

Si $\exp(0) = 0$, alors $\exp(x) \times \exp(-x) = 0$. Or ceci contredit la propriété 3.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.

Propriété 5

Pour tous réels x et y , on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Cette relation est appelée **relation fonctionnelle**.

Démonstration

Soit y un réel fixé. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de telles fonctions sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = h(x).$$

$$\text{De plus, } h(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1.$$

On en déduit par unicité de la fonction exponentielle que pour tout réel x , $h(x) = \exp(x)$.

On a alors $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$, c'est-à-dire $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Remarque

On dit que l'exponentielle transforme les sommes en produits.

Exemples

- $\exp(5) = \exp(2+3) = \exp(2) \times \exp(3)$
- $\exp(x+2) = \exp(x) \times \exp(2)$
- $\exp(3x) = \exp(x+2x) = \exp(x) \times \exp(2x) = \exp(x) \times \exp(x) \times \exp(x) = \exp(x)^3$

Propriété 6

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n , on a :

$$\bullet \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \bullet \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \bullet \exp(x)^n = \exp(nx)$$

Démonstration

- Pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. Or $\exp(x) \neq 0$. D'où $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- Pour tous réels x et y , $\exp(x-y) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- Cette démonstration est hors programme et donc admise.

Exemples

- $\exp(-5) = \frac{1}{\exp(5)}$
- $\exp(7-2x) = \frac{\exp(7)}{\exp(2x)} = \frac{\exp(7)}{\exp(2) \times \exp(x)}$
- $\exp(5)^3 = \exp(3 \times 5) = \exp(15)$

III. La notation e **Définition 7**

On note $\exp(1) = e$ où e est un nombre irrationnel tel que $e \approx 2,718$.

Propriété 8

Pour tout nombre entier relatif n , $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \exp(1)^n = e^n$.
Par extension, pour tout nombre réel x , $\exp(x) = e^x$.

Remarques

- La notation puissance demeure problématique car d'après la définition, l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ or on connaît les puissances entières d'un nombre (2^3 , 2^{-3} , etc...). On peut définir les puissances rationnelles sous certaines conditions ($2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $2^{\frac{5}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5$, etc...) et on pourrait définir par exemple $2^{\frac{1}{3}}$ comme le nombre vérifiant $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$ mais les puissances réelles sont nouvelles. On admet que e^x a bien « du sens » (donc qu'il est calculable).
- Le nombre e est irrationnel, on admet que ce nombre ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des réels.

Propriété 9

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n , on a :

- $e^x \times e^{-x} = 1$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^x \neq 0$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Exemples

- $e^2 \times e^{-2} = 1$
- $e^2 \times e^3 = e^{2+3} = e^5$
- $\frac{1}{e^{-5}} = e^5$
- $e^{x-2t} = \frac{e^x}{e^{2t}}$
- $(e^{x-2})^2 = e^{2(x-2)} = e^{2x-4}$

Remarque

En résumé, l'exponentielle a la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances.

IV. Étude de la fonction exponentielle**IV.1 Signe et variation****Propriété 10**

La fonction exponentielle est **définie** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est **égale à sa fonction dérivée**. Pour tout réel x , $f'(x) = e^x$.

Propriété 11

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Propriété 12

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$. Or $e^x > 0$. Comme la dérivée est strictement positive, alors la fonction exponentielle est strictement croissante.

IV.2 Limites

Théorème 13 (hors programme)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

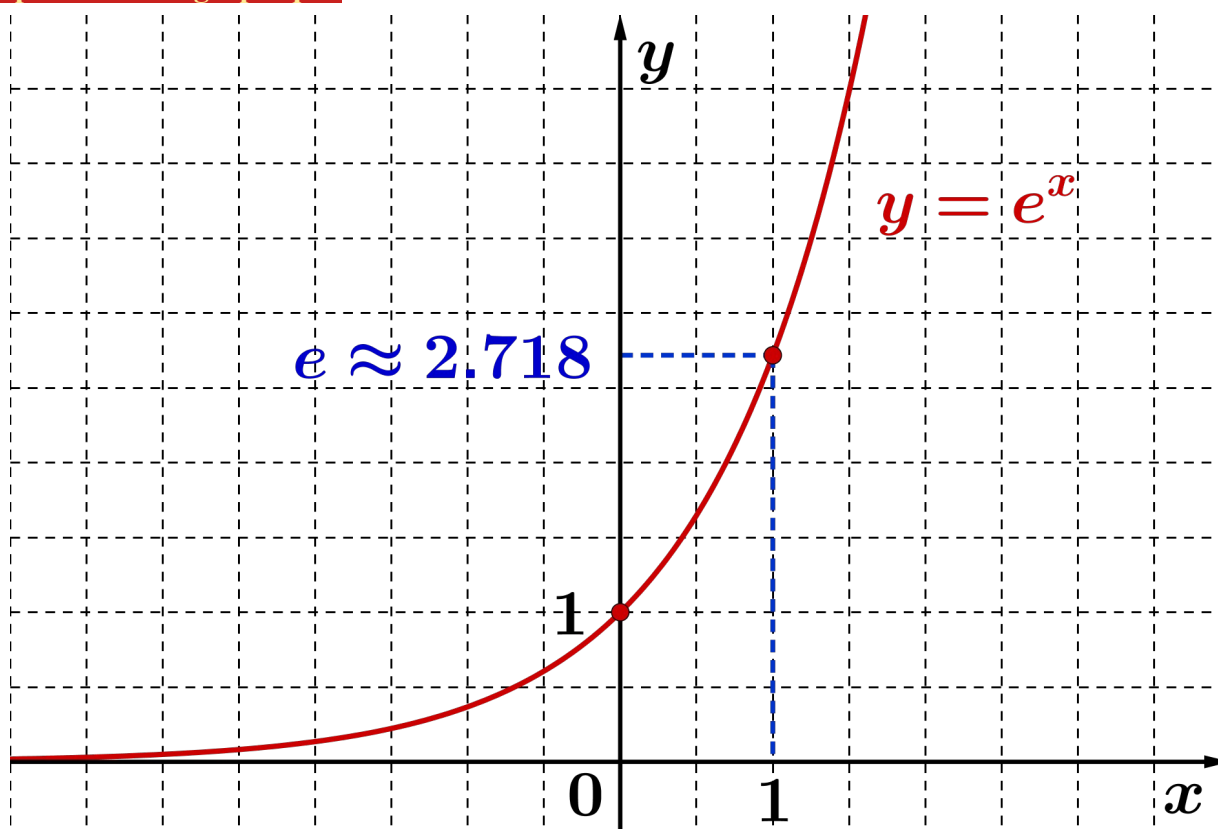
Démonstration

La démonstration nécessite d'utiliser les théorèmes de composition de limites vus en terminale.

IV.3 Tableau de variations et courbe représentative

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x		0	1	e
				$+\infty$

Représentation graphique

IV.4 Propriétés analytiques

Propriété 14

- Pour tout réel $x \leq 0$, $0 < e^x \leq 1$.
- Pour tout réel $x \geq 0$, $1 \leq e^x$.
- Pour tous réels x et y , $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$.
- Pour tous réels x et y , $e^x \leq e^y$ si et seulement si $x \leq y$.

Démonstration

- Soit $x \in]-\infty; 0[$. $x \leq 0$, donc par croissance de la fonction exponentielle, $e^x \leq e^0$ ie $e^x \leq 1$. De plus la fonction exponentielle est strictement positive. Donc $0 < e^x \leq 1$.
- Soit $x \in [0; +\infty[$. $0 \leq x$, donc par croissance de la fonction exponentielle, $e^0 \leq e^x$ ie $1 \leq e^x$.
- Soit deux réels x et y . Si $x = y$, alors $e^x = e^y$ par stricte croissance de la fonction exponentielle. Le sens indirect est admis.
- Soit deux réels x et y . Si $x \leq y$, alors $e^x \leq e^y$ par stricte croissance de la fonction exponentielle. Le sens indirect est admis.

Exemples

- $e^{2x-8} = e^{-3x+2} \Leftrightarrow 2x-8 = -3x+2 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$
- $e^{(-3x-9)} < e^3 \Leftrightarrow -3x-9 < 3 \Leftrightarrow -3x < 12 \Leftrightarrow x > -4$
- $e^{4x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{4x-3} = e^0 \Leftrightarrow 4x-3 = 0 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

V. Lien avec les suites géométriques

Propriété 15

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.
Alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a .

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ car l'exponentielle ne s'annule pas et $u_0 = e^{0 \times a} = 1$.

D'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = \frac{e^{na+a}}{e^{na}} = \frac{e^{na} \times e^a}{e^{na}} = e^a$. Le quotient ne dépend pas de n , il est donc constant.

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison e^a et de premier terme 1.

Remarque

On pouvait aussi remarquer que pour tout entier n , $u_n = e^{na} = (e^a)^n$.

Propriété 16

Soit a un réel et la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.

- La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $a > 0$.
- La suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$.

Démonstration

- On suppose que la suite (u_n) est strictement croissante.
 (u_n) est strictement croissante $\Leftrightarrow e^a > 1$ car (u_n) est une suite géométrique de raison $e^a > 0$
 $\Leftrightarrow e^a > e^0$ car $e^0 = 1$
 $\Leftrightarrow a > 0$ par stricte croissante de l'exponentielle
- On utilise un raisonnement analogue.

Propriété 17

Soit a un réel. Alors :

- Si $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = +\infty$.
- Si $a < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = 0$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemples

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{\frac{n}{3}}$ est une suite croissante car $\frac{1}{3} > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^{-2n}$ est une suite décroissante car $-2 < 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u **Définition 18**

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction e^u définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est appelée exponentielle de u .

Exemple

Si $u(x) = 2x - 1$, la fonction e^u est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x-1}$.

Propriété 19

La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Démonstration

On peut procéder à l'aide d'un changement de variable en remplaçant $u(x)$ par X .

Propriété 20

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = -2x + 1$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = -2$.

On en déduit donc que $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

Propriété 21

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

Démonstration

Pour tout réel x , on a $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Or pour tout réel x , $e^{u(x)} > 0$. Donc le signe de f' dépend de celui de u' , ce qui signifie que f' et u' ont le même signe. Par suite, cela implique que f et u ont les mêmes variations.

Propriété 22

• Soit a un réel strictement positif. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax+b} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax+b} = +\infty.$$

• Soit a un réel strictement négatif. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax+b} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax+b} = 0.$$

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.