Variables aléatoires

Exercice 1

On fait tourner une roue de loterie formée de huit secteurs : un bleu (B), quatre rouges (R) et trois jaunes (J). Un secteur est alors désigné par une flèche.
On suppose que chaque secteur a la même probabilité d'être désigné.
1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
On est en présence d'une situation d'équiprobabilité.

B : « La couleur désignée est le bleu ». On a $P(B)=\frac{1}{8}$.

R : « La couleur désignée est le rouge ». On a $P(R)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

J : « La couleur désignée est le jaune ». On a $P(J)=\frac{3}{8}$.

2. Déterminer de deux façons différentes la probabilité de l'événement « La couleur désignée n'est pas le rouge ».
Première méthode : On détermine le nombre de cases qui possède une couleur différente du rouge. Il y a les 3 cases bleues et la case jaune.
On a $P(B)+P(J)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.
Deuxième méthode : On utilise l'événement contraire. On détermine la probabilité d'obtenir un secteur rouge et on en déduit la probabilité contraire.
On a $P(R)=\frac{1}{2}$. Ainsi $P(\overline{R})=1-P(R)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Exercice 2

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants.
1. A : « La carte tirée est le valet de cœur ».
Il y a un seul valet de cœur. Donc $P(A)=\frac{1}{32}$.
2. B : « La carte tirée est le sept de pique ».
Il y a un seul sept de pique. Donc $P(B)=\frac{1}{32}$.
3. C : « La carte tirée est une dame ».
Il y a quatre dames. Donc $P(C)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.
4. D : « La carte tirée est un trèfle ».
Il y a huit trèfles. Donc $P(D)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.

Exercice 3

Un sac opaque contient dix boules, quatre boules portant le numéro 1, trois boules portant le numéro 2, deux boules portant le numéro 3 et une boule portant le numéro 4. On tire au hasard une boule et on lit le nombre de points.

1. Déterminer l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve aléatoire.

Les issues possibles sont représentées par l'ensemble des numéros que l'on peut obtenir.

Donc $\Omega=\{1;2;3;4\}$.

2. Donner, à l'aide d'un arbre, la loi de probabilité.

L'arbre sera composé de quatre branches, une pour chaque numéro. La branche menant au 1 est de probabilité $\frac{4}{10}$, celle menant au 2 est de $\frac{3}{10}$, celle menant au 3 est de $\frac{2}{10}$ et celle menant au 4 est de $\frac{1}{10}$. On vérifie que $\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=1$.

3. Calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir au moins 2 points ».

Obtenir au moins 2 points signifie obtenir 2, 3 ou 4 points.

Donc $P(A)=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Autre méthode :

L'événement contraire de A est l'événement $\overline{A}$: « Obtenir exactement 1 point ».

Or $P(\overline{A})=\frac{4}{10}$. Ainsi $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Exercice 4

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs.

Parmi les 120 billets distribués, trois donnent droit à 4 places gratuites, 6 donnent droit à trois places gratuites, 18 donnent droit à deux places gratuites, 42 donnent droit à une place gratuite et les autres billets ne gagnent rien.

1. Quelle est la probabilité pour un spectateur de gagner exactement deux places gratuites ?

Il y a 18 billets qui donnent droit à deux places gratuites.

Donc $P(\{2\})=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$. Il y a donc 3 chances sur 20 de gagner exactement deux places gratuites.

2. Quelle est la probabilité pour un spectateur de ne rien gagner ?

Il y a $120-4-6-18-42=50$ billets qui ne donnent aucune place gratuite.

Donc $P(\{0\})=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$. Il y a donc cinq chances sur douze de ne gagner aucune place gratuite.

3. On s'intéresse au nombre de places gratuites gagnées avec un billet.

a. Quels sont les résultats possibles ?

Les résultats possibles sont 0, 1, 2, 3 ou 4.

b. Déterminer la loi de probabilité de ces résultats.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de places gratuites gagnées avec un billet.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{50}{120}$	$\frac{42}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{4}{120}$

On vérifie que $\frac{50}{120}+\frac{42}{120}+\frac{18}{120}+\frac{6}{120}+\frac{4}{120}=1$.

c. Quelle est la probabilité pour un spectateur de gagner au moins deux places gratuites.
Gagner au moins deux places gratuites signifient gagner deux places ou plus.
Donc $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{18}{120}+\frac{6}{120}+\frac{4}{120}=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}$.
Il y a donc sept chances sur trente de gagner au moins deux places gratuites.

Exercice 5

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
Soit Ω l'univers. On a $\Omega=\{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$. Il y a quatre issues possibles. C'est une situation d'équiprobabilité car la probabilité de chaque résultat est identique (probabilité de $\frac{1}{4}$).
On pourra faire un arbre pour mieux visualiser la situation si besoin.

1. A : « On obtient deux fois PILE ». On a $P(A)=P((P;P))=\frac{1}{4}$.

2. B : « On obtient deux fois FACE ». On a $P(B)=P((F;F))=\frac{1}{4}$.

3. C : « On obtient deux résultats distincts ». On a $P(C)=P((P;F))+P((F;P))=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Exercice 6

On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'un de ces dés est vert, l'autre est rouge. On lance les deux dés et on note d'abord le nombre sur le dé vert, puis celui sur le dé rouge.
1. Représenter, à l'aide d'un tableau à double entrée, l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve aléatoire.
Soit Ω l'univers. Ω représente l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire, donc chaque couple de valeurs que l'on peut obtenir avec les dés cubiques, en commençant par celui du dé vert (en réalité, l'ordre importe peu car on obtient les mêmes résultats par symétrie).

dé vert / **dé rouge**	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(2;1)$	$(3;1)$	$(4;1)$	$(5;1)$	$(6;1)$
2	$(1;2)$	$(2;2)$	$(3;2)$	$(4;2)$	$(5;2)$	$(6;2)$
3	$(1;3)$	$(2;3)$	$(3;3)$	$(4;3)$	$(5;3)$	$(6;3)$
4	$(1;4)$	$(2;4)$	$(3;4)$	$(4;4)$	$(5;4)$	$(6;4)$
5	$(1;5)$	$(2;5)$	$(3;5)$	$(4;5)$	$(5;5)$	$(6;5)$
6	$(1;6)$	$(2;6)$	$(3;6)$	$(4;6)$	$(5;6)$	$(6;6)$

2. Quelle est la probabilité de chaque issue ?
Chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{36}$ (c'est une situation d'équiprobabilité).
3. Quelle est la probabilité d'obtenir les mêmes numéros sur les deux dés ?
Il y a 6 résultats qui possèdent deux fois le même numéro. Donc il y a une probabilité de $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ d'obtenir les mêmes numéros.

4. Quelle est la probabilité que la somme soit égale à 4 ?
On énumère toutes les possibilités qui donnent une somme de 4 avec les deux dés. D'après le tableau, il y en a 3 : $(1;3)$, $(2;2)$ et $(3;1)$. Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 4 avec les deux dés est de $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

5. Quelle est la probabilité que la somme soit strictement supérieure à 7 ?
On énumère toutes les possibilités qui donnent une somme strictement supérieure à 7. D'après le tableau (les cases en rouge), il y en a 15. Donc la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 7 avec les deux dés est de $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

Exercice 7

On lance successivement un dé cubique parfait et une pièce de 1€ bien équilibrée.
À PILE on associe le nombre 1 et à FACE on associe le nombre 2.
Un résultat de l'épreuve aléatoire est la somme du numéro obtenu sur le dé et du nombre obtenu.

1. Dresser un arbre donnant toutes les possibilités.
Je vous laisse le soin de le faire !
Je vous conseille de commencer par les deux branches Pile et Face, puis des les faire suivre chacune par six branches allant du 1 au 6.

2. En déduire la probabilité d'obtenir une somme :
C'est une situation d'équiprobabilité. Chaque issue possède une probabilité de $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

a. Impaire. Il y a six chemins. La probabilité est donc de $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

b. Multiple de 3. Il y a trois chemins. La probabilité est donc de $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

c. Égale à 6. Il y a deux chemins. La probabilité est donc de $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

d. Ni 6, ni 5. Il y a huit chemins. La probabilité est donc de $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

e. Au moins 4. Il y a neuf chemins. La probabilité est donc de $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

f. Au plus 3. Il y a trois chemins. La probabilité est donc de $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

Exercice 8

Une boîte contient beaucoup de billes unicolores, rouges, vertes ou bleues. On prend une poignée de trois billes.
On s’intéresse aux événements :
A : « Deux billes au moins sont vertes ».
B : « Les trois billes sont de la même couleur ».
C : « Il y a au moins une bille rouge ».
D : « Aucune bille n’est rouge ».
E : « Le tirage est tricolore ».
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Les événements A et B sont incompatibles.
Deux événements sont incompatibles (ou disjoints) s'ils n'ont aucun élément en commun. Or l'événement « les trois billes sont vertes » est une événement élémentaire à A et à B. Donc les événements A et B ne sont pas incompatibles.

2. Les événements B et E sont contraires.
L'événement contraire de B est $\overline{B}$: « Au moins deux billes sont de couleurs différentes ». Donc les événements B et E ne sont pas contraires (l'événement contraire de E est $\overline{E}$: « Au moins deux billes sont de même couleur »).

Attention!

Le contraire de « les trois billes sont de la même couleur » n'est pas « chaque bille à une couleur différente ».

3. Les événements A et C sont incompatibles.
L'événement « Deux billes sont vertes et une est rouge » est un événement élémentaire à A et à C. Donc les événements A et C ne sont pas incompatibles.

4. Les événements C et D sont contraires.
Le contraire de « au moins » est « aucun ». Donc les événements C et D sont bien contraire.

5. Les événements A et E sont disjoints.
Dès l'instant ou deux billes au moins sont vertes, le tirage ne peut être tricolore. Donc les événements A et E n'ayant pas d'élément en commun, ils sont disjoints (ou incompatibles).

Exercice 9

On considère deux événements A et B tels que : $P(A)=0,7$, $P(B)=0,4$ et $P(A\cap B)=0,2$.

1. Calculer $P(A\cup B)$.
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,7+0,4-0,2=0,9$.

2. Calculer $P(\overline{A})$.
$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,7=0,3$.

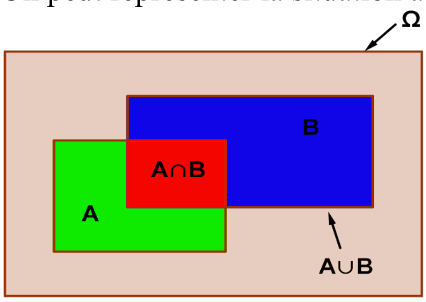
3. C est un événement tel que B et C sont incompatibles et $P(C)=0,3$.
Calculer $P(B\cup C)$.
Comme B et C sont incompatibles, alors $B\cap C=\emptyset$. Donc $P(B\cap C)=0$.
D'où $P(B\cup C)=P(B)+P(C)=0,4+0,3=0,7$.

Exercice 10

Soit A et B deux événements incompatibles tels que $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,2$.
Calculer $P(A\cap B)$ et $P(A\cup B)$.
Les événements A et B étant incompatibles, alors $A\cap B=\emptyset$.
Donc $P(A\cap B)=0$.
D'où $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,4+0,2=0,6$.

Exercice 11

Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 3 à la fois à la pêche et à la lecture. On choisit au hasard une personne du groupe.
D'après la situation, trois personnes s'intéressent à la lecture et à la pêche. Ce qui signifie que $10-3=7$ s'intéresse **seulement** à la pêche et $8-3=5$ s'intéresse **seulement** à a lecture. Il reste donc $20-(7+5+3)=20-15=5$ personnes qui ne s'intéressent ni à la pêche ni à la lecture.
Soit A l'événement « la personne choisie s'intéresse à la pêche » et B l'événement « la personne choisie s'intéresse à la lecture ». On peut représenter la situation à l'aide du schéma ci-dessus.



On a alors $P(A)=\frac{10}{20}$, $P(B)=\frac{8}{20}$, $P(A\cap B)=\frac{3}{20}$.

1. Calculer la probabilité qu'elle s'intéresse à la pêche ou à la lecture.
On a $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{10}{20}+\frac{8}{20}-\frac{3}{20}=\frac{15}{20}$.

2. Calculer la probabilité qu'elle ne s'intéresse ni à la pêche, ni à la lecture.
On a $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{15}{20}=\frac{5}{20}$.

Remarque

On aurait pu « simplement » calculer le nombre de personnes concernées puis le diviser par l'effectif total pour trouver chacune des probabilités demandées.

Exercice 12

Le tableau suivant indique les résultats d'un groupe d'élèves à un examen en fonction de leur qualité d'interne ou d'externe.

	interne	**externe**
admis	58	212
non admis	40	75

Il y a $58+40+212+75=385$ élèves au total.

1. On rencontre par hasard un élève de ce groupe. Quelle est la probabilité que cet élève soit :

a. Interne admis ? $\frac{58}{385}$ **b.** Externe ? $\frac{212+75}{385}=\frac{41}{55}$ **c.** Non admis ? $\frac{40+75}{385}=\frac{23}{77}$

d. Externe non admis ? $\frac{75}{385}=\frac{15}{77}$ **e.** Externe ou non admis ? $\frac{212+75+40}{385}=\frac{327}{385}$

2. On rencontre par hasard un interne. Quelle est la probabilité qu'il soit admis ?
La probabilité est de $\frac{58}{58+40}=\frac{29}{49}$

3. On rencontre par hasard un élève non admis. Quelle est la probabilité qu'il soit externe ?
La probabilité est de $\frac{75}{40+75}=\frac{15}{23}$.

Exercice 14

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

C'est une situation d'équiprobabilité. Chaque issue possible a une probabilité de $\frac{1}{8}$. Je vous laisse le soin de faire un arbre pour vérifier les résultats qui suivent.

1. A : « Ils auront trois filles ».

$P(A)=\frac{1}{8}$ (un seul chemin possible).

2. B : « Ils auront trois enfants de même sexe ».

$P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ (deux chemins possibles).

3. C : « Ils auront au plus une fille ».

$P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (quatre chemins possibles)

4. D : « Les trois enfants ne seront pas du même sexe ».

$P(D)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ (six chemins possibles).

Exercice 15

Un bureau de poste possède deux guichets A et B dont l'un des deux au moins est ouvert.
On considère les événements E et F suivants :
E : « Le guichet A est ouvert ».
F : « Le guichet B est ouvert ».
Une étude statistique a montré que $P(E)=0,8$ et $P(F)=0,5$.
Un client se présente au bureau de poste.
1. Quelle est la probabilité que l'un au moins des guichets soit ouvert ?
D'après l'énoncé, l'un des deux guichets au moins est ouvert. Ainsi $P(E\cup F)=1$.
2. Calculer la probabilité que les deux guichets soient ouverts.
On a $P(E\cap F)=P(E)+P(F)-P(E\cup F)=0,8+0,5-1=0,3$.
Ainsi il y a 30% de chance que les deux guichets soient ouverts.

Exercice 16

La probabilité dans une population qu'un individu possède un caractère génétique A est de $0,8$ et un caractère génétique B est de $0,6$. La probabilité qu'il possède les deux caractères est de $0,45$. Calculer la probabilité qu'il ne possède aucun des deux caractères.
D'après l'énoncé, on a $P(A)=0,8$, $P(B)=0,6$ et $P(A\cap B)=0,45$.
On en déduit que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,8+0,6-0,45=0,95$.
Donc il y a une probabilité de $0,95$ que l'individu en question possède l'un au moins des deux caractères.
D'où $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,95=0,05$.
Ainsi, il y a une probabilité de $0,05$ que l'individu en question ne possède aucun des deux caractères.

Exercice 17

Un joueur lance deux dés tétraédriques équilibrés.
Soit Ω l'univers. Ω Représente l'ensemble des issues possibles, c'est-à-dire tous les couples de chiffres obtenus à l'aide des deux dés.
1. On définit la variable aléatoire X égale à la somme des deux résultats.
a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
X prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.
b. En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de X .

dé 2 \ dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. On décide de jouer au jeu suivant : si le nombre obtenu est multiple de 3, le joueur gagne, sinon il perd. En utilisant la variable aléatoire X , déterminer la probabilité que le joueur gagne.
Les cases rouges représentent les multiples de 3. Chaque case a une probabilité de $\frac{1}{36}$.

x_i	Multiple de 3	Pas multiple de 3
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{36}$	$\frac{24}{36}$

Exercice 18

Un sac contient un jeton marqué « 1 » et un jeton marqué « 2 ». On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage et on fait la somme des deux nombres obtenus. Cette somme définit une variable aléatoire S .
1. Déterminer l'ensemble Ω des issues de cette expérience, puis l'ensemble des valeurs prises par S .
On a $\Omega=\{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$.
S prend les valeurs 2, 3 ou 4.
2. Quel est l'événement de Ω associé à l'événement $S=3$?
L'événement associé à $S=3$ est l'événement $\{(1;2);(2;1)\}$.

Exercice 19

On considère l'expérience qui consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés. On définit la variable aléatoire X égale au produit des deux résultats obtenus.

On obtient le tableau à double entrées ci-dessous. Chaque case a une probabilité de $\frac{1}{36}$.

dé 1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 et 36.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

x_i	12	15	16	18	20	24	25	30	136
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 20

On considère à nouveau l'expérience qui consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés. On définit la variable aléatoire X égale à 1 si les nombres obtenus sont premiers entre eux, à 0 sinon. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

On obtient le tableau à double entrées ci-dessous. Chaque case a une probabilité de $\frac{1}{36}$.

dé 1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	1	1	0
4	1	0	1	0	1	0
5	1	1	1	1	0	1
6	1	0	0	0	1	0

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{13}{36}$	$\frac{23}{36}$

Exercice 21

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de caisses en service à l'ouverture d'un supermarché. La loi de X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$0,2$	$0,3$	$0,3$	$0,1$	m

Déterminer le réel m, puis calculer $P(X\geqslant 3)$.

On a $m=1-(0,2+0,3+0,3+0,1)=1-0,9=0,1$.

D'où $P(X\geqslant 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0,3+0,1+0,1=0,5$.

Exercice 22

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire dans le tableau ci-contre. Déterminer les réels p_1, p_2, p_3 et p_4 sachant qu'ils sont en progression arithmétique de raison $0,1$.

x_i	1	2	3	4
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

Une progression arithmétique signifie que pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute toujours la même constante. Ici, $p_2=p_1+0,1$, $p_3=p_2+0,1$ et $p_4=p_3+0,1$. Or $p_1+p_2+p_3+p_4=1$.

D'où $p_1+p_1+0,1+p_1+0,2+p_1+0,3=1 \Leftrightarrow 4p_1=0,4 \Leftrightarrow p_1=0,1$.

On en déduit que $p_2=0,2$, $p_3=0,3$ et $p_4=0,4$ (On vérifie que $0,1+0,2+0,3+0,4=1$).

Exercice 23

On lance deux fois consécutivement un dé tétraédrique équilibré. Si on obtient deux résultats identiques, on marque 1 point, sinon on marque 0 point.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de points marqués.

Un dé tétraédrique est un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Si on lance deux dés tétraédriques, il y a au total $4\ 4=16$ issues (certaines sont identiques).

Il n'y a que quatre issues possibles donnant deux résultats identiques : soit on obtient deux 1, soit deux 2, soit deux 3 ou encore deux 4. Il y a donc $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ d'obtenir deux résultats identiques.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 24

Un jeu comporte huit cartes marquées 7, 8, 9, 10, V, D, R et As. On tire une carte au hasard. La variable aléatoire X prend la valeur 10 si l'on tire 7, 8, 9 ou 10 ; la valeur 15 pour V, D ou R et la valeur 20 pour l'As. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

x_i	10	15	20
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exercice 25

Une urne contient dix boules bleues, sept boules rouges, deux boules vertes, une boule jaune. Un joueur tire au hasard une boule de l'urne et note sa couleur : B (bleue), R (rouge), V (verte), J (jaune).
Il gagne 1 euro s'il tire une boule rouge, 2 euros s'il tire une boule verte, mais perd 3 euros s'il tire la boule jaune. Il ne gagne et ne perd rien s'il tire une boule bleue.
Soit G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur lors d'une partie.
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
La variable aléatoire G prend les valeurs -3, 0, 1 et 2.
On en déduit la loi de probabilité de G :

g_i	-3	0	1	2
$P(G=g_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

2. Déterminer la probabilité de l'événement $(G>0)$.
L'événement $(G>0)$ correspond à $(G=1)\cup(G=2)$.
On a $P(G>0)=P(G=1)+P(G=2)=\frac{7}{20}+\frac{2}{20}=\frac{9}{20}$.
La probabilité d'obtenir un gain strictement positif est $\frac{9}{20}$.

Exercice 26

Le joueur joue au même jeu que celui de l'exercice précédent, mais cette fois-ci cela se passe au Japon, où le taux du yen est de 108 yens pour un euro. Il doit, de plus, payer 100 yens pour jouer. Cette mise de départ ne lui est remboursée dans aucun cas.
1. Exprimer la variable aléatoire Y donnant le gain du joueur en yens en fonction de la variable G de l'exercice précédent.
On a $Y=108G-100$.
2. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?
La variable aléatoire Y prend les valeurs -424, -100, 8 et 116.
On en déduit la loi de probabilité de Y :

y_i	-424	-100	8	116
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

Exercice 27

On prend un jeu constitué de 32 cartes.
Si la carte tirée est un as, on gagne 3 jetons ; si c'est un cœur, on gagne 2 jetons ; pour toutes les autres cartes, on perd un jeton. Ces gains se cumulent si la carte tirée répond à plusieurs critères.
On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque carte le gain en jetons correspondant.
Déterminer la loi de probabilité de X.

• Si on tire l'as de cœur, on gagne $3+2=5$ jetons.
• Si on tire un autre des trois as restants, on gagne 3 jetons.
• Si on tire un autre des sept cœurs, on gagne 2 jetons.
• Si on tire une autre carte, on perd 1 jeton.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-2	2	3	5
$P(X=x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Exercice 29

On écrit les lettres du mot MATHS sur cinq cartons. On met ces cartons dans une boîte et on prélève au hasard trois cartons en remettant à chaque fois le carton dans la boîte. On appellera « mot » une succession de trois lettres, ayant un sens ou non.

1. Combien de « mots » différents peut-on obtenir ainsi ?
Il y a répétition de 5 choix et ceci 3 fois de suite.
Le nombre de résultats possibles, donc de « mots », est $5^3=125$.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir « AAA » ?
Il n'y a qu'un seul tirage qui permette d'obtenir « AAA ». La probabilité associée est donc $\frac{1}{125}$.

3. Quelle est la probabilité que le « mot » commence par A ?
Chaque issue étant équiprobable, il y autant de chances d'obtenir un mot qui commence par un A que par une autre des lettres qui compose le mot MATHS.
Il y a alors $\frac{125}{5}=25$ « mots » qui commence par A. Ainsi, il y a $\frac{25}{125}=\frac{1}{5}$ pour que le « mot » commence par A.

4. On appelle V la variable aléatoire dénombrant le nombre de voyelles par « mot ». Déterminer la loi de probabilité de V.
La variable aléatoire V peut prendre les valeurs 0 ; 1 ; 2 ou 3.
La probabilité de tomber sur une voyelle est $\frac{1}{5}$ et celle de tomber sur une consomme est $\frac{4}{5}$.
On en déduit que :

• La probabilité de n'avoir aucune voyelle est $\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{64}{125}$.
• La probabilité d'obtenir une voyelle est $3\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{48}{125}$ (car la voyelle peut être placée à trois endroits différents)
• La probabilité d'obtenir deux voyelles est $3\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$ (car il existe trois combinaisons différentes pour placer les deux voyelles).

• La probabilité d'obtenir trois voyelles est $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{125}$.

On en déduit la loi de probabilité de V :

v_i	0	1	2	3
$P(V=v_i)$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

Exercice 30

Le cycle d'allumage d'un feu tricolore est le suivant :
• feu vert pendant $20\,s$.
• feu orange pendant $5\,s$.
• feu rouge pendant $35\,s$.

Un physicien, habitant près du feu, note que les longueurs d'onde associées au vert, à l'orange et au rouge sont respectivement de 550, 600 et 750 nanomètres. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la longueur d'onde d'un feu à un instant choisi au hasard.

Déterminer la loi de probabilité de X .

X prend les valeurs 550, 600 et 750.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	550	600	750
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{35}{60}$

Exercice 31

Un sac contient quatre cartons numérotés 1, 2, 3 et 4. On tire au hasard deux cartons dans le sac.

1. Montrer que le tirage possède six issues équiprobables.

Soit Ω l'univers. Ω est composé de toutes les issues possibles, c'est-à-dire de tous les couples de cartons possibles. Donc $\Omega=\{(1;2);(1;3);(1;4);(2;3);(2;4);(3;4)\}$.

Ici, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi, les événements $(1;2)$ et $(2;1)$ sont confondus.

Comme chaque carton a autant de chance d'être choisi, chaque couple de cartons a autant de chance d'être choisi. Chaque couple de cartons a une probabilité associée de $\frac{1}{6}$.

Ainsi il y a six issues possibles et équiprobables.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage la somme des valeurs inscrites sur les deux cartons tirés.

X prend les valeurs 3, 4, 5, 6 et 7.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. Déterminer $P(X\leqslant 4)$ et interpréter ce nombre.

On a $P(X\leqslant 4)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Ainsi il y a une chance sur 3 d'obtenir une somme inférieure ou égale à 4.

Exercice 32

Un jeu consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
Chaque sortie de pile P rapporte 3 points, chaque sortie de face F fait perdre 2 points.
On considère la variable aléatoire X égale au nombre (positif ou négatif) de points obtenus après les trois lancers.
On pourra faire un arbre pour mieux visualiser les résultats qui suivent.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X et la loi de probabilité de X.

X prend les valeurs -6, -1, 4 et 9.

Il y a un chemin qui fait gagner 9 points, donc une probabilité associée de $\frac{1}{8}$.

Il y a trois chemins qui fait gagner 4 points, donc une probabilité associée de $\frac{3}{8}$.

Il y a trois chemins qui fait perdre 1 points, donc une probabilité associée de $\frac{3}{8}$.

Il y a un chemin qui fait perdre 6 points, donc une probabilité associée de $\frac{1}{8}$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-6	-1	4	9
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type σ.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} p_i x_i=-6\times\frac{1}{8}-1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1{,}5\ .$$

Ainsi un joueur peut espérer gagner en moyenne $1{,}5$ point par partie (ou 3 points toutes les deux parties).

$$V(X)=\sum_{i=1}^{4} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2=\frac{1}{8}(-6-1{,}5)^2+\frac{3}{8}(-1-1{,}5)^2+\frac{3}{8}(4-1{,}5)^2+\frac{1}{8}(9-1{,}5)^2=18{,}75\ .$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{18{,}75}\simeq 4{,}33$.

L'écart-type étant d'environ $4{,}33$, il exprime le fait qu'on ait de « bonnes chances » d'obtenir un nombre de points positif.

Exercice 33

On considère la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	p	q	$0{,}5$	$0{,}1$

1. Calculer p et q sachant que l'espérance de cette variable aléatoire est égale à $2{,}6$.
D'après les propriétés sur les probabilités, on a $p+q+0{,}5+0{,}1=1$ ie $p+q=1-0{,}6=0{,}4$.
On obtient donc une première équation noté (E_1) .

De plus $E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i=1\times p+2\times q+3\times 0{,}5+4\times 0{,}1=p+2q+1{,}9$.

Or $E(X)=2{,}6$, d'où $p+2q+1{,}9=2{,}6 \Leftrightarrow p+2q=0{,}7$.
On obtient donc une deuxième équation notée (E_2) .
On résout donc ce système à deux équations à l'aide de la méthode de substitution.

D'après (E_1), on a $p=0,4-q$. On remplace l'expression de p dans l'équation (E_2).
Alors $0,4-q+2q=0,7 \Leftrightarrow 0,4+q=0,7 \Leftrightarrow q=0,3$.
On en déduit donc que $p+0,3=0,4$, soit $p=0,1$.
2. Calculer la variance et l'écart type de cette variable aléatoire.

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{4} p_i(x_i-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2=0,1(1-2,6)^2+0,3(2-2,6)^2+0,5(3-2,6)^2+0,1(4-2,6)^2=0,64.$$

$$\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}=\sqrt{0,64}=0,8.$$

Exercice 35

On lance un dé cubique équilibré et on définit deux règles du jeu.
1. Si la face supérieure est 1, 2 ou 3, on perd 2€, sinon on gagne 4€.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.
X prend les valeurs -2 et 4.

x_i	-2	4
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On a $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{2} x_i p_i=-2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=-1+2=1$.
Ainsi un joueur peut espérer gagner en moyenne 1€ par partie.

Remarque

$$\mathrm{V}(x)=\sum_{i=1}^{2} p_i(x_i-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2=\frac{1}{2}(-2-1)^2+\frac{1}{2}(4-1)^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=\frac{18}{2}=9.$$

$$\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}=\sqrt{9}=3.$$

L'écart-type étant de 3, il exprime le fait qu'on ait de « bonnes chances » d'obtenir un gain positif.
2. Si la face supérieure est 6, on gagne 11€, sinon on perd 1€.
Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{Y})$.
Y prend les valeurs -1 et 11.

y_i	-1	11
$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

On a $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\sum_{i=1}^{2} y_i p_i=-1\times\frac{5}{6}+11\times\frac{1}{6}=\frac{-5}{6}+\frac{11}{6}=\frac{6}{6}=1$.
Ainsi un joueur peut espérer gagner en moyenne 1€ par partie.

Remarque

$$\mathrm{V}(\mathrm{Y})=\sum_{i=1}^{2} p_i(y_i-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2=\frac{5}{6}(-1-1)^2+\frac{1}{6}(11-1)^2=\frac{20}{6}+\frac{100}{6}=\frac{120}{6}=20.$$

$$\sigma(\mathrm{Y})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{Y})}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

L'écart-type étant de $2\sqrt{5}$, il exprime le fait qu'on ait de « bonnes chances » d'obtenir un gain positif.

Exercice 36

Pour distribuer les places aux exposants lors d'un marché nocturne, un tirage au sort est organisé par la municipalité. Les emplacements sont numérotés de 1 à 20. 3 emplacements mesurent 5 mètres de large, 8 emplacements mesurent 3 mètres de large et les emplacements restant mesurent 2 mètres de large. On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque emplacement sa largeur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

X prend les valeurs 2, 3 et 5.

x_i	2	3	5
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{20}$

2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

$E(X)=\sum_{i=1}^{3} p_i x_i=2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{8}{20}+5\times\frac{3}{20}=\frac{18}{20}+\frac{24}{20}+\frac{15}{20}=\frac{57}{20}=2{,}85$.

$V(X)=\sum_{i=1}^{3} p_i(x_i-E(X))^2=\frac{9}{20}(2-2{,}85)^2+\frac{8}{20}(3-2{,}85)^2+\frac{3}{20}(5-2{,}85)^2=1{,}0275$.

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1{,}0275}\simeq 1{,}014$.

3. Interpréter l'espérance de la loi de probabilité de X.

Un exposant peut espérer avoir en moyenne un emplacement de $2{,}85$ mètres.

Exercice 37

Un joueur lance un dé à six faces qui a été truqué de la façon suivante :

• la probabilité de sortie du 6 est le double de celle obtenue dans le cas d'équiprobabilité ;

• les probabilités de sortie des cinq autres résultats sont égales.

On appelle X la variable aléatoire égale au résultat sorti.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

Soit Ω l'univers. On a $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

La probabilité d'obtenir un 6 est le double de celle obtenue dans le cas d'un dé non truqué.

Donc $P(X=6)=2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

La probabilité de tous les autres chiffres est identique.

D'où $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)$. Or la somme de ces cinq probabilités doit être égale à $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Donc $5P(X=1)=\frac{2}{3}$, soit $P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$

2. Quel est le résultat dont la sortie est la plus probable ? Expliquer.

C'est le chiffre 6 car il possède la probabilité la plus élevée.

3. Calculer $E(X)$.

On a $E(X)=\sum_{i=1}^{6} p_i x_i=1\times\frac{2}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{2}{15}+6\times\frac{1}{3}=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$.

Ainsi un joueur peut espérer obtenir en moyenne un résultat de $\frac{8}{3}$ par partie (ce qui n'a pas beaucoup de sens ici).

Exercice 38

Un joueur lance un dé à six faces qui a été truqué de la façon suivante :

• la probabilité de sortie du 6 est égale à $\frac{1}{2}$;

• les probabilités de sortie des autres résultats sont identiques.

On appelle X la variable aléatoire égale au résultat sorti.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Comme il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ que le 6 sorte, cela signifie qu'il y a une probabilité totale de $\frac{1}{2}$ pour que tous les autres résultats sortent. Or la probabilité de chacun de ces cinq autres résultat est identique. Donc les cinq autres résultats ont chacun une probabilité de sortie de $\frac{\frac{1}{2}}{5}=\frac{1}{10}$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$

2. Calculer $E(X)$.

On a $E(X)=\sum_{i=1}^{6} p_i x_i=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{10}+5\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{2}=\frac{45}{10}=4,5$.

Ainsi un joueur peut espérer obtenir en moyenne un résultat de $4,5$ par partie (ce qui n'a pas beaucoup de sens ici).

Exercice 39

Une roulette de casino comporte 37 cases, numérotées de 0 à 36. On fait tourner la roulette et on annonce le numéro qui est sorti. Tous les numéros ont la même probabilité de sortir.

1. Un joueur mise sur un des numéros. On dit qu'il fait un plein.

Si ce numéro sort, il récupère 35 fois sa mise plus sa mise. Sinon, il perd sa mise au profit du casino. Quelle est l'espérance de gain du joueur ?

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Soit m la mise du joueur.

Soit il gagne $35m+m-m=35m$ (c'est-à-dire 35 fois sa mise de départ).

Soit il perd $-m$ (c'est-à-dire sa mise de départ).

x_i	$-m$	$35m$
$P(X=x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

On a $E(X)=\sum_{i=1}^{2} p_i x_i=\frac{36}{37}\times(-m)+\frac{1}{37}\times 35m=\frac{-36m}{37}+\frac{35m}{37}=-\frac{m}{37}<0$.

Ainsi le joueur peut espérer (ou craindre) perdre en moyenne sa mise divisée par 37 par partie (ou sa mise toutes les 37 parties).

2. Cette fois, le joueur mise sur deux numéros. On dit qu'il fait un cheval.

Si un des numéros choisis sort, le joueur récupère 17 fois sa mise plus sa mise. Sinon, il la perd.

Quelle est l'espérance de gain du joueur ?

Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur. Soit m la mise du joueur.

Soit il gagne $17m+m-m=17m$ (c'est-à-dire 17 fois sa mise de départ).
Soit il perd $-m$ (c'est-à-dire sa mise de départ).

y_i	$-m$	$17m$
$P(Y=y_i)$	$\frac{35}{37}$	$\frac{2}{37}$

On a $E(Y)=\sum_{i=1}^{2} p_i y_i=\frac{35}{37}\times(-m)+\frac{2}{37}\times 17m=\frac{-35m}{37}+\frac{34m}{37}=-\frac{m}{37}<0$.

Ainsi le joueur peut espérer (ou craindre) perdre en moyenne sa mise divisée par 37 par partie (ou sa mise toutes les 37 parties).

Exercice 41

Un client intente un procès qui, s'il le gagne, lui rapportera la somme de 100000€.
Il a le choix entre deux avocats. Le premier réclame des honoraires fixes de 12000€. Le second réclame 30% de la somme si le procès est gagné et rien sinon. Chacun des deux avocats assure que le client a 75% de chances de gagner le procès.
En se basant sur l'espérance de gain dans chaque cas, conseiller le client dans son choix de l'avocat.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme finale.

• 1^{er} choix : avocat 1

S'il gagne le procès, il gagne $10000-12000=88000$ €.
S'il perd le procès, il perd 12000€.

x_i	-12000	88000
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

On a $E(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i p_i=-12000\times\frac{1}{4}+88000\times\frac{3}{4}=63\ 000$.

Donc le client peut espérer gagner en moyenne 63000€ à la fin du procès.

• 2^{e} choix : avocat 2

S'il gagne le procès, il gagne $100000-\frac{30}{100}\times 100000=70000$ €.

S'il perd le procès, il perd 0€.

x_i	0	70000
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

On a $E(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i p_i=0\times\frac{1}{4}+70000\times\frac{3}{4}=52500$.

Donc le client peut espérer gagner en moyenne 63000€ à la fin du procès.

• Conclusion : Au sens mathématique de l'espérance, il faut conseiller au client de choisir le 1^{er} avocat car l'espérance est plus élevée. Donc en moyenne, il gagnera plus d'argent avec le 1^{er} avocat. Maintenant, on peut se poser la question sur des critères autres que l'espérance. Si on choisit le 2^{e} avocat, on ne prend aucun risque car dans tous les cas, on ne perd pas d'argent. Donc à voir si l'on est joueur et si l'on aime le goût du risque ! (bien entendu, ceci n'arriverait pas en réalité car un avocat prend toujours des honoraires quelque soit le résultat !).

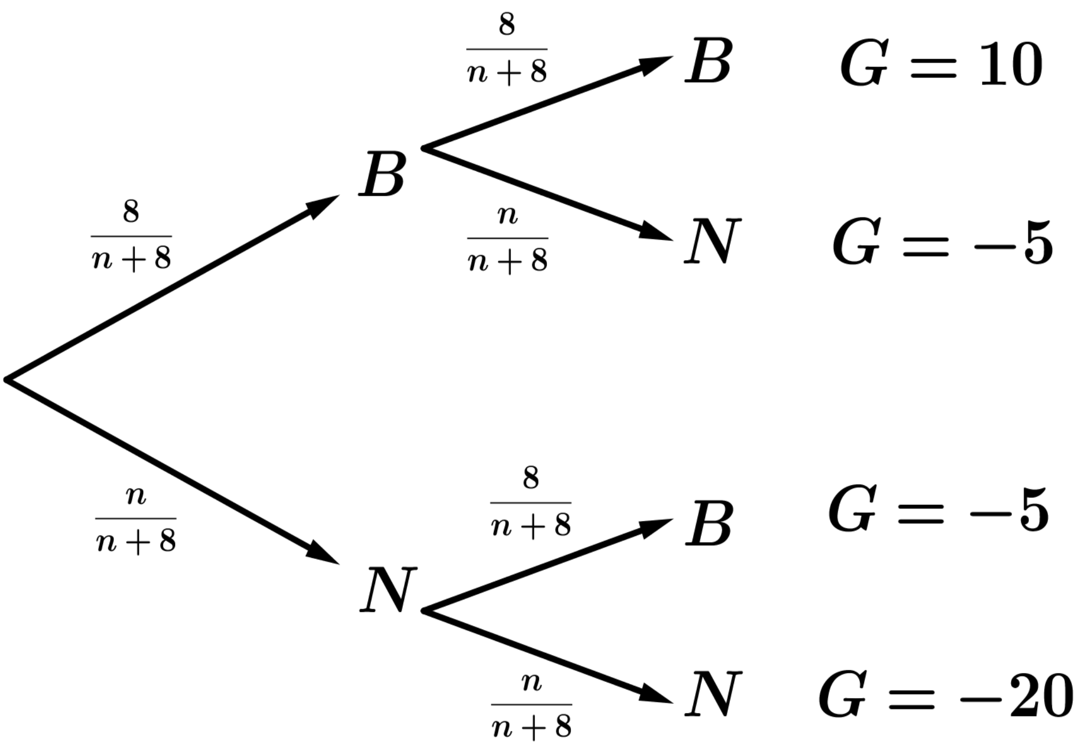
Problèmes

Problème 1 *...Avec remise...*

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.
Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire avec remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5€ et pour chaque boule noire tirée, il perd 10€.
On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par G .
3. Déterminer la loi de probabilité de G .
4. Déterminer, en fonction de n , l'espérance de G .
5. Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

1. Il y a au total $n+8$ boules. Au premier tirage, la probabilité de tirer une boule blanche est de $\frac{8}{n+8}$, et celle de tirer une boule noire est de $\frac{n}{n+8}$. Sachant que l'on remet la boule tirée dans l'urne, le deuxième tirage est identique. Lors du second tirage, la probabilité de tirer une boule blanche sera la même qu'au premier tirage et de même pour la probabilité de tirer une boule noire.
On peut résumer la situation par l'arbre suivant, avec B l'événement « On tire une boule blanche » et N l'événement « On tire une boule noire ».



2. D'après l'arbre obtenu, G prend les valeurs -20 , -5 et 10.

3. D'après les règles de calcul dans un arbre pondéré, on a alors :

$P(G=-20)=\dfrac{n}{n+8}\times\dfrac{n}{n+8}=\dfrac{n^2}{(n+8)^2}$.

$P(G=-5)=\dfrac{8}{n+8}\times\dfrac{n}{n+8}+\dfrac{n}{n+8}\times\dfrac{8}{n+8}=\dfrac{16n}{(n+8)^2}$.

$P(G=10)=\dfrac{8}{n+8}\times\dfrac{8}{n+8}=\dfrac{64}{(n+8)^2}$.

On peut résumer tous ces résultats dans le tableau suivant :

g_i	-20	-5	10
$P(G=g_i)$	$\dfrac{n^2}{(n+8)^2}$	$\dfrac{16n}{(n+8)^2}$	$\dfrac{64}{(n+8)^2}$

4. On a $E(G)=-20\times\dfrac{n^2}{(n+8)^2}-5\times\dfrac{16n}{(n+8)^2}+10\times\dfrac{64}{(n+8)^2}=\dfrac{-20n^2-80n+640}{(n+8)^2}$.

5. Le jeu est équitable si l'espérance est nulle, c'est-à-dire si $E(G)=0$.

Or $E(G)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-20n^2-80n+640}{(n+8)(n+7)}=0 \Leftrightarrow -20n^2-80n+640=0 \Leftrightarrow n^2+4n-32=0$.

Ceci revient à résoudre une équation du second degré.

$\Delta=4^2-4\times1\times(-32)=16+128=144>0$.

Il y a donc deux solutions réelles distinctes :

$n_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-\sqrt{144}}{2\times1}=\dfrac{-4-12}{2}=\dfrac{-16}{2}=-8$

Et $n_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+\sqrt{144}}{2\times1}=\dfrac{-4+12}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

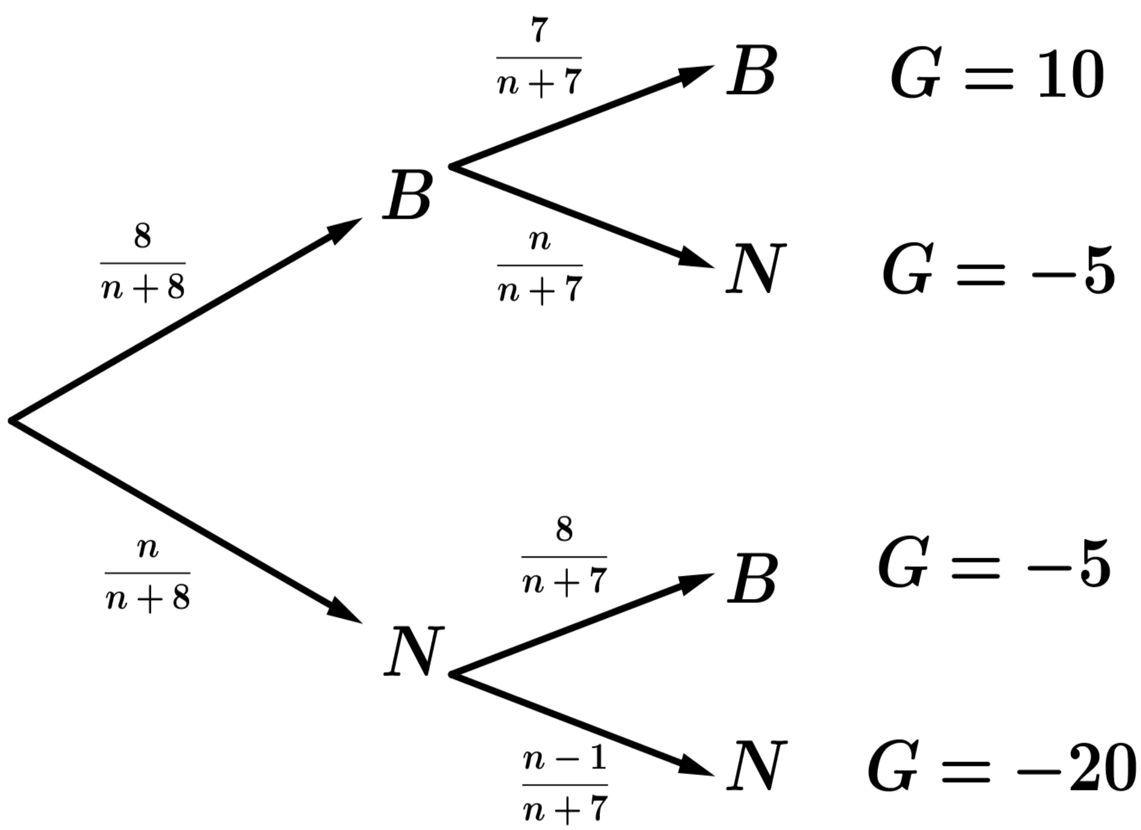
Or la solution $n_1=-8$ est impossible car n représente un nombre de boule, donc il est nécessairement positif. Ainsi, le jeu est équitable si et seulement si $n=4$.

Problème 2 *...Sans remise...*

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.
Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire sans remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5€ et pour chaque boule noire tirée, il perd 10€.
On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par G .
3. Déterminer la loi de probabilité de G .
4. Déterminer, en fonction de n , l'espérance de G .
5. Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

1. Il y a au total $n+8$ boules. Au premier tirage, la probabilité de tirer une boule blanche est de $\frac{8}{n+8}$, et celle de tirer une boule noire est de $\frac{n}{n+8}$. Sachant que l'on ne remet pas la boule tirée dans le sac, le deuxième tirage n'est pas identique. Lors du second tirage, la probabilité de tirer une boule blanche aura changé et de même pour la probabilité de tirer une boule noire.
On peut résumer la situation par l'arbre suivant, avec B l'événement « On tire une boule blanche » et N l'événement « On tire une boule noire ».



2. D'après l'arbre obtenu, G prend les valeurs -20 , -5 et 10.

3. D'après les règles de calcul dans un arbre pondéré, on a alors :

$P(G=-20)=\frac{n}{n+8}\times\frac{n-1}{n+7}=\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$.

$P(G=-5)=\frac{8}{n+8}\times\frac{n}{n+7}+\frac{n}{n+8}\times\frac{8}{n+7}=\frac{16n}{(n+8)(n+7)}$.

$P(G=10)=\frac{8}{n+8}\times\frac{7}{n+7}=\frac{56}{(n+8)(n+7)}$.

On peut résumer tous ces résultats dans le tableau suivant :

$\boldsymbol{g_i}$	-20	-5	10
$\mathbf{P(G=g_i)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$	$\frac{16n}{(n+8)(n+7)}$	$\frac{56}{(n+8)(n+7)}$

4. On a $E(G)=-20\times\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}-5\times\frac{16n}{(n+8)(n+7)}+10\times\frac{56}{(n+8)(n+7)}=\frac{-20n^2-60n+560}{(n+8)(n+7)}$.

5. Le jeu est équitable si l'espérance est nulle, c'est-à-dire si $E(G)=0$.

Or $E(G)=0\Leftrightarrow\frac{-20n^2-60n+560}{(n+8)(n+7)}=0\Leftrightarrow-20n^2-60n+560=0\Leftrightarrow n^2+3n-28=0$.

Ceci revient à résoudre une équation du second degré.

$\Delta=3^2-4\times1\times(-28)=9+112=121>0$.

Il y a donc deux solutions réelles distinctes :

$n_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{121}}{2\times1}=\frac{-3-11}{2}=\frac{-14}{2}=-7$

Et $n_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{121}}{2\times1}=\frac{-3+11}{2}=\frac{8}{2}=4$

Or la solution $n_1=-7$ est impossible car n représente un nombre de boule, donc il est nécessairement positif. Ainsi, le jeu est équitable si et seulement si $n=4$.