Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geqslant p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geqslant p}$ ou simplement u .
u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice** $\boldsymbol{n}$.
u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !
• u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec u_n+1 qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
• u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

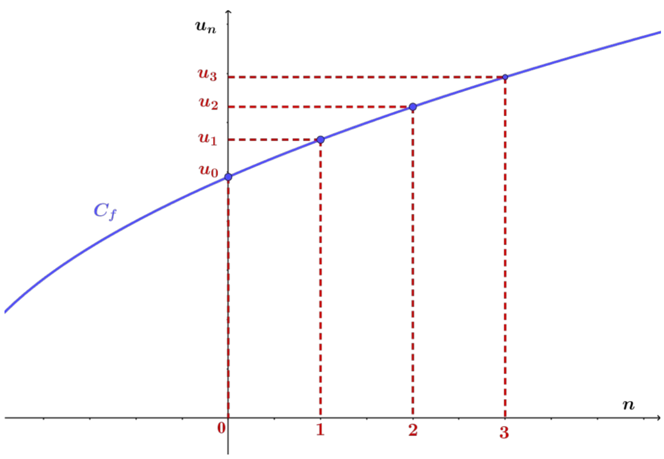
Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

II. Mode de génération d'une suite numérique

II.1 Suite définie par une formule explicite

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a ; +\infty[$.
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$.
Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .
Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

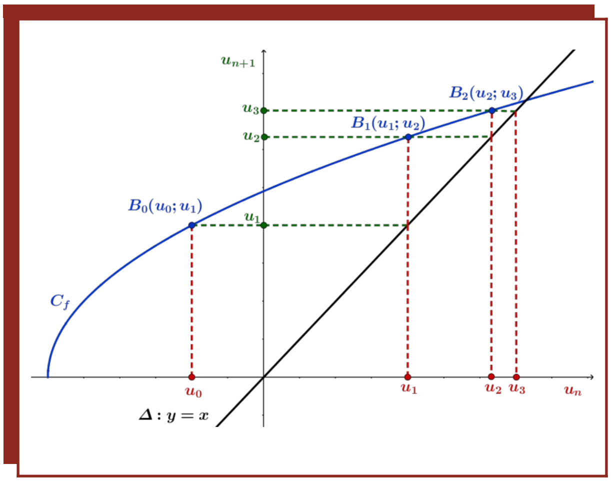
Représentation graphique
Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $\mathrm{A}_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



II.2 Suite définie par une formule de récurrence

Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On suppose que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.
Soit a un nombre réel de I et p un entier.
On peut alors définir une suite (u_n) en posant $u_p = a$ et pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Représentation graphique
Graphiquement, $B_0(u_0 ; u_1)$ appartient à la courbe C_f .
Pour déterminer $B_1(u_1 ; u_2)$, il faut placer u_1 , l'ordonnée de B_0 , en abscisse.
On « reporte » donc u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite Δ : $y = x$.
On poursuit de même pour construire $B_2(u_2 ; u_3)$, $B_3(u_3 ; u_4)$, …



III. Sens de variations

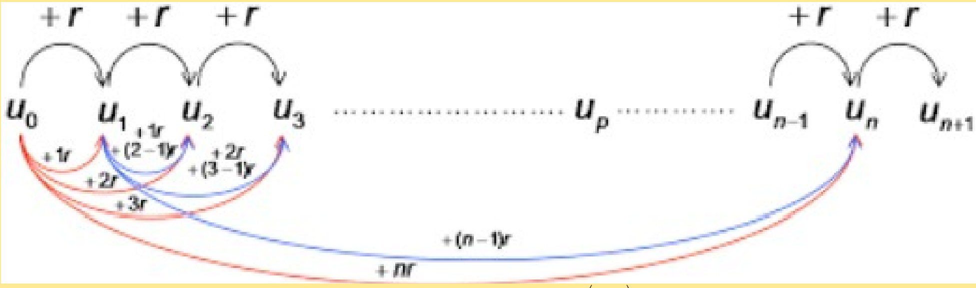
- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang p .
- Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p si pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Méthodes d'étude de variation d'une suite
- Étude du signe de la différence : Soit (u_n) une suite.
  - Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est une suite croissante.
  - Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors (u_n) est une suite décroissante.
- Étude du quotient : Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.
  - Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et donc (u_n) est une suite croissante.
  - Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc (u_n) est une suite décroissante.
- Étude de la fonction f associée pour une suite explicite :

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a ; +\infty[$.
Soit un entier $p \geqslant a$ et la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant p$ par $u_n = f(n)$.
  - Si la fonction f est (strictement) **croissante** sur $[p ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante** à partir du rang p .
  - Si la fonction f est (strictement) **décroissante** sur $[p ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante** à partir du rang p .

Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.
Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n, $u_{n+1}=u_n+r$.

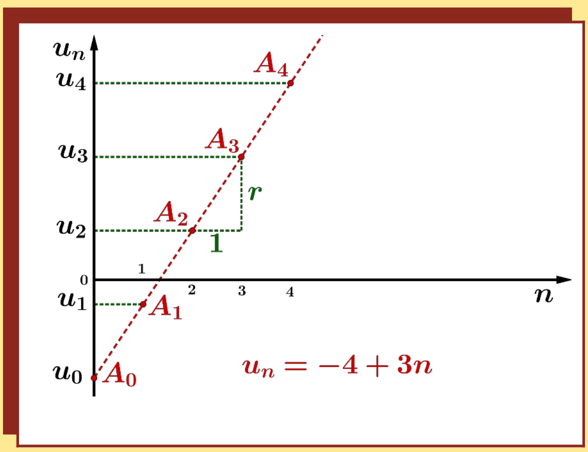


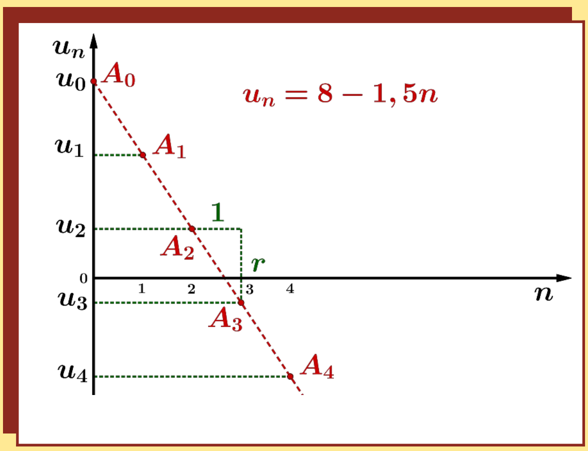
Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n). Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n, $r=u_{n+1}-u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers n et p tels que $n \geqslant p$, on a $u_n=u_p+(n-p)r$.
En particulier, pour tout entier n, $u_n=u_0+nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.
- Si $r>0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r<0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r=0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p.

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées** $(n;u_n)$.
Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y=rx+u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).





Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers entiers est :

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Soit (u_n) une suite arithmétique. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs}=\text{nombre de termes}\times\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique de premier terme u_0 :

$$\mathrm{S}_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=\sum_{k=0}^{n} u_k=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$$

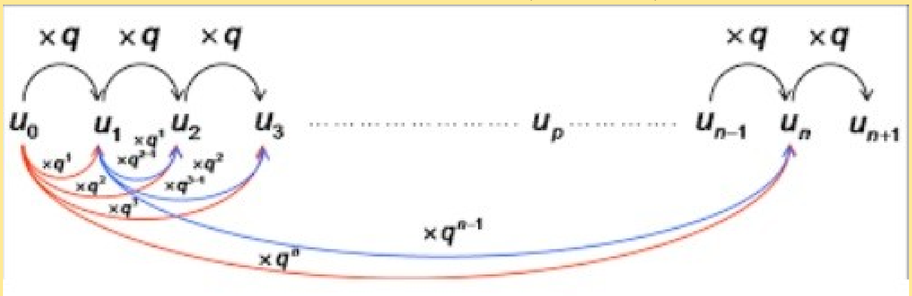
De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n>p$, alors :

$$\mathrm{S}_n=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=\sum_{k=p}^{n} u_k=(n-p+1)\times\frac{u_p+u_n}{2}$$

Suites géométriques

I. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.
Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1}=q\times u_n$.



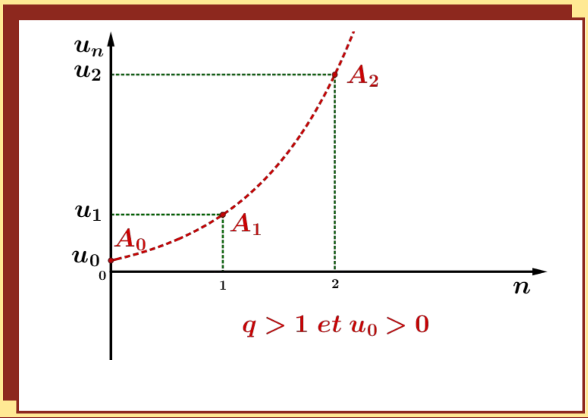
Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n).
Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n, $q=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

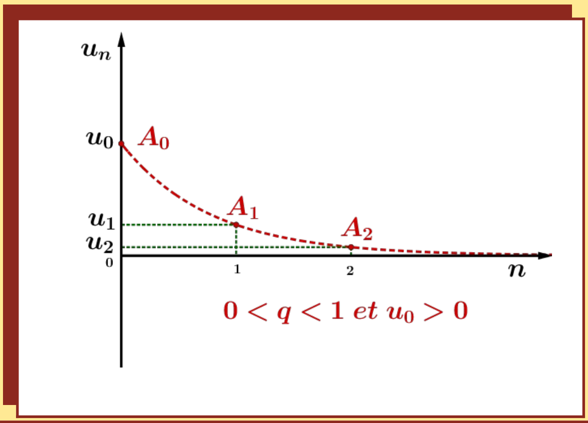
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tous entiers n et p tels que $n\geqslant p$, on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$.
En particulier, pour tout entier n, $u_n=u_0\times q^n$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p>0$.
- Si $q>1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0<q<1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q=1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p.
- Si $q<0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque
Si $u_p<0$, ces sens de variations sont **inversés**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est **un ensemble de points isolés** $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{u_n})$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.





Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1. La somme des n premières puissances successives d'un nombre q est : $1+q+q^2+\ldots+q^n=\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 1$. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs}=\text{premier terme}\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$\mathrm{S}_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=\sum_{k=0}^{n} u_k=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n>p$, alors :

$$\mathrm{S}_n=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=\sum_{k=p}^{n} u_k=u_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

II. Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=au_n+b$.

Méthode générale

Dans les exercices, pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique, on utilise une suite annexe (v_n) (donnée par l'énoncé et définie en fonction de (u_n)) qui est géométrique.

De manière générale, on démontre que (v_n) est une suite géométrique (en exprimant v_{n+1} en fonction de v_n) et on donne son expression générale. On en déduit alors l'expression générale de (u_n) . Enfin on conclut sur les variations et la limite de (u_n) .

Méthode : Étude d'une suite arithmético-géométrique

M. Durand dépose 5000€ sur un compte rémunéré au taux annuel de $2,5\ \%$ et choisit d'y ajouter à la fin de chaque année la somme de 2000€. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n années.

• On exprime u_{n+1} en fonction de u_n :
Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de $2,5\ \%$ est $1+\frac{2,5}{100}=1,025$.
De plus, 2000€ sont ajoutés chaque début d'année.
Donc pour tout entier n , $u_{n+1}=1{,}025\,u_n+2000$ et $u_0=5000$.

• On introduit la suite géométrique (v_n) :
Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n=u_n+80000$. On montre que (v_n) est géométrique.
Pour tout entier n , on a $v_{n+1}=u_{n+1}+80000$

$$\begin{aligned}&=1,025\,u_n+2000+80000\\&=1,025(v_n-80000)+82000\\&=1,025\,v_n-82000+82000\\&=1,025\,v_n\end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=1,025$ et de premier terme $v_0=u_0+80000=5000+80000=85000$.

• On exprime v_n en fonction de n :
Pour tout entier n , on a $v_n=v_0\times q^n=85000\times 1{,}025^n$.

• On exprime u_n en fonction de n :
Pour tout entier n , on a $u_n=v_n-80000=85000\times 1,025^n-80000$.

• On cherche un seuil :
M. Durand souhaite s'acheter une voiture à 15000€. Il se demande combien d'années seront nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000€. La calculatrice nous donne (programme ou table de valeurs) $n=5$. Donc il faudra 5 ans à M. Durand pour s'offrir sa voiture.

III. Algorithme de calcul

Un algorithme est une suite finie d'instructions données dans un certain ordre permettant de résoudre un problème. Ce mot vient du nom du mathématicien perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (8e siècle après J.C.), surnommé le père de l'algèbre.

Exemple 1

On souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à un réel A *donné.*

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=3n^2+2$. On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$. On a $u_0=3\times0^2+2=2$.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: Prompt A
: 0→N
: 2→U
: While U< A
: N+ 1→N
: 3*N²+ 2→U
: End
: Disp N
```

Exemple 2

Étant donné une suite géométrique de raison $q\in]0;1[$, *on souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs à un réel* a *donné.*

On injecte à un patient une dose de $2\,cm^3$ de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n, on note u_n le volume du médicament en cm^3.

On souhaite connaître la « demi-vie » du médicament, c'est-à-dire le moment où le médicament sera absorbé à 50%.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q=1-\frac{12}{100}=0,88$. Pour tout entier n, $u_n=2\times0,88^n$.

Un algorithme se construit en trois phases : l'**initialisation**, le **traitemen**t et la **sortie**.

• L'initialisation consiste à affecter aux différentes variables de départ leur valeur. Ici, les deux variables sont n (l'indice de la suite qui correspond au nombre d'heures) qui débute à 0 et u (le volume de médicament dans le sang) qui début à 2.

• Le traitement consiste à effectuer les différents calculs pour atteindre l'objectif. Ici, tant que u (le volume de médicament dans le sang) est supérieur à 1, on continue à calculer les termes de la suite.

• La sortie consiste à afficher le résultat trouvé. Ici, on affichera la valeur de n, c'est-à-dire au bout de combien d'heures le médicament sera à moitié absorbé.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: 0→N
: 2→U
: While U>1
: N+1→N
: 2*0,88^N→U
: End
: Disp N
```

```
PROGRAM : SEUIL
: 0→N
: While 2*0,88^N>1
: N+1→N
: End
: Disp N
```

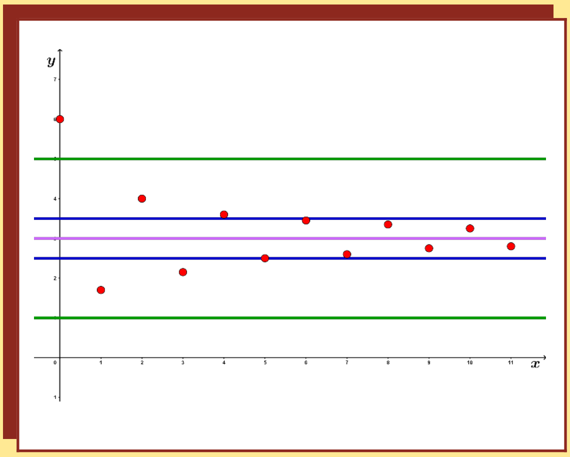
L’algorithme nous donne un seuil de 6, c’est-à-dire qu’à partir de 6 heures après l’injection du médicament, il en restera moins de la moitié dans le corps du patient.

Limites de suites

I. Limite d'une suite

Une suite (u_n) admet une **limite finie** égale à l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

On dit que (u_n) converge vers $\boldsymbol{l}$ ou tend vers $\boldsymbol{l}$.

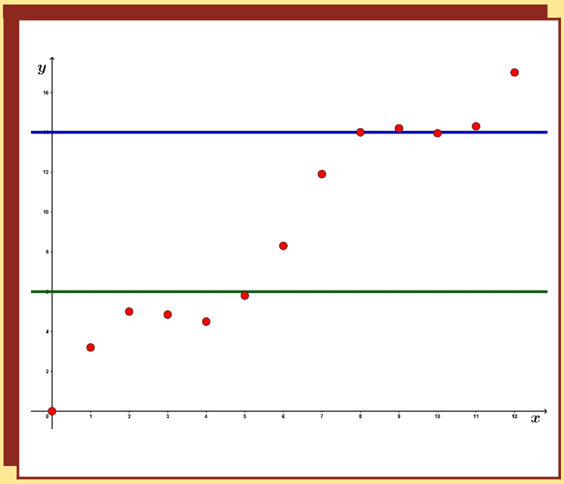


• Une suite (u_n) admet une **limite infinie** égale à $+\infty$ si pour tout nombre réel A, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On dit que (u_n) **diverge vers $+\infty$ ou tend vers $+\infty$**.

• Une suite (u_n) admet une **limite infinie** égale à $-\infty$ si pour tout nombre réel A, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

On dit que (u_n) **diverge vers $-\infty$ ou tend vers $-\infty$**.



II. Propriétés sur les limites

Soit (u_n) une suite et l et a deux réels.

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + a = l + a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a \times u_n = a \times l$.

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $a > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + a = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a \times u_n = +\infty$.

• Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $a < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + a = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a \times u_n = -\infty$.

Soit q un réel.
• Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
• Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
• Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
• Si $q \leqslant -1$, alors (q^n) diverge et n'admet aucune limite.

III. Limites de suites particulières

III.1 Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r.
• Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
• Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
• Si $r = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_p$.

III.2 Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_p > 0$ et de raison q.
• Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
• Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_p$.
• Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
• Si $q \leqslant -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

Remarques
• Si $u_p < 0$ et $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
• Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$.
(w_n) est une suite géométrique de raison $q = -1 \leqslant -1$ donc (w_n) n'a pas de limite. En effet, cette suite est dite **alternée**. Elle alterne entre les réels -1 et 1.

Exemple d'application
On injecte à un patient une dose de $2\,cm^3$ de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n, on note u_n le volume du médicament en cm^3 présent dans le corps du patient. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0{,}88$. Or $0{,}88 < 1$, donc la dose de médicament va diminuer jusqu'à devenir nulle.