

Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement u .

u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice** n .

u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !

- u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
- u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

II. Mode de génération d'une suite numérique

II.1 Suite définie par une formule explicite

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

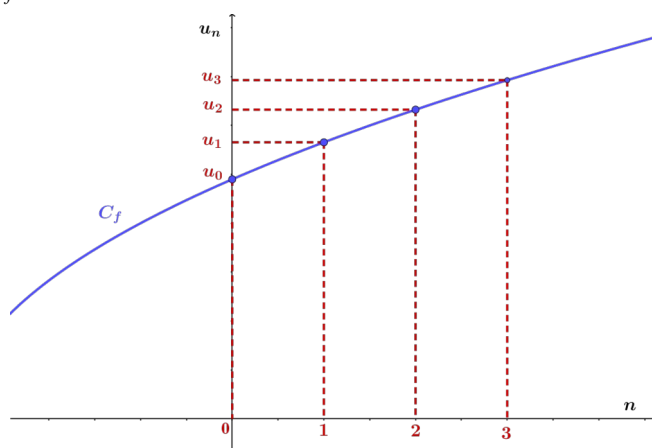
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geq a$, $u_n = f(n)$.

Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .

Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique

Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



II.2 Suite définie par une formule de récurrence

Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On suppose que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.

Soit a un nombre réel de I et p un entier.

On peut alors définir une suite (u_n) en posant $u_p = a$ et pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

III. Sens de variations

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang p .
- Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p si pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Méthode : étude du signe de la différence

Soit (u_n) une suite.

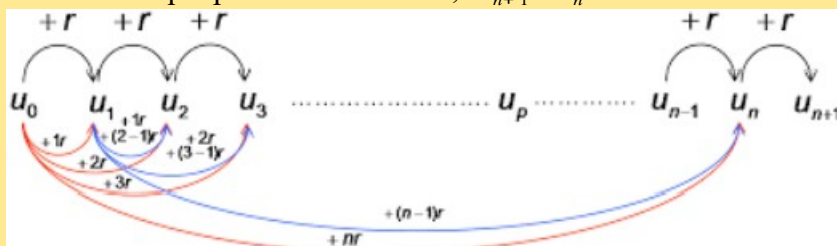
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est une suite croissante.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est une suite décroissante.

Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

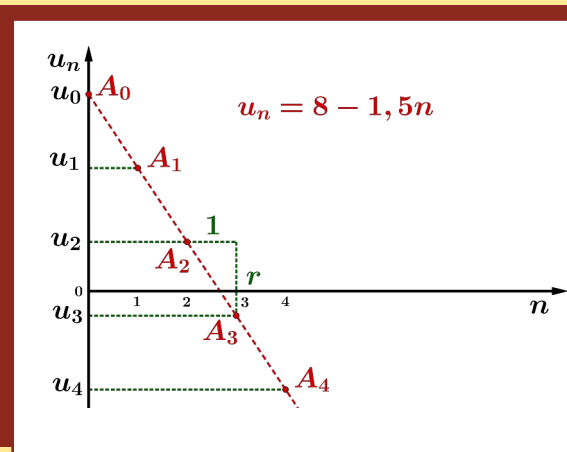
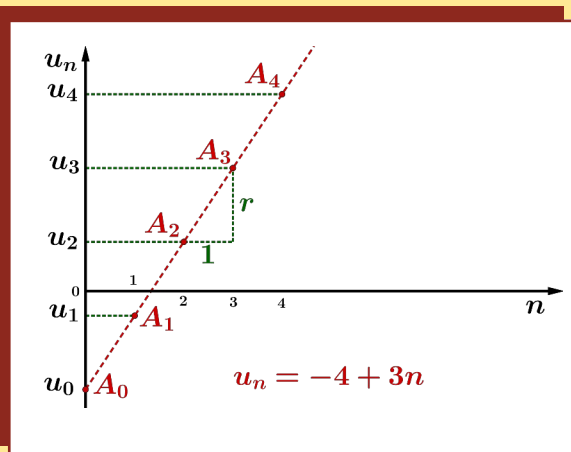
En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

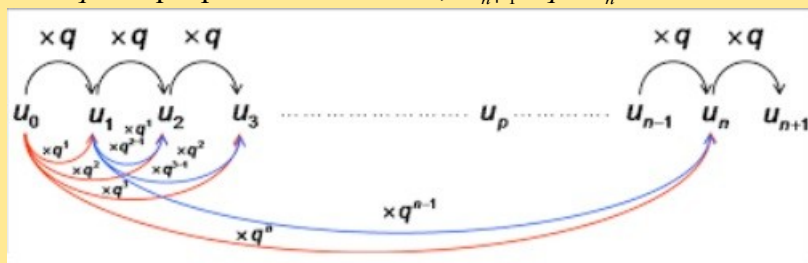
Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).



II. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_0 .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque

Si $u_0 < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est un ensemble de points isolés $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.

