

Limites de fonctions

I. Limites en l'infini

I.1 Limite infinie

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

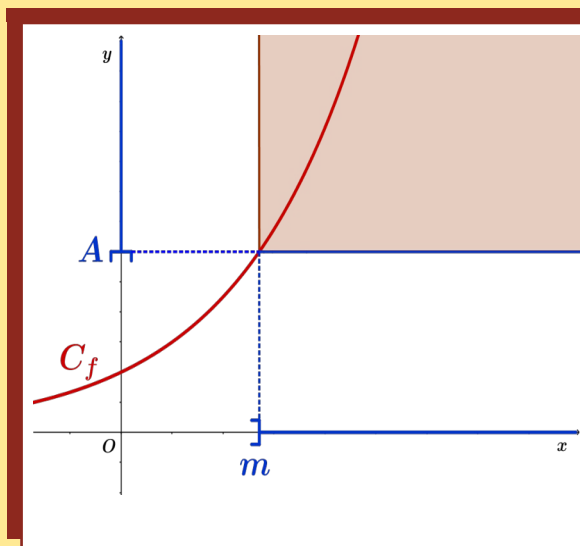
Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



On a pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

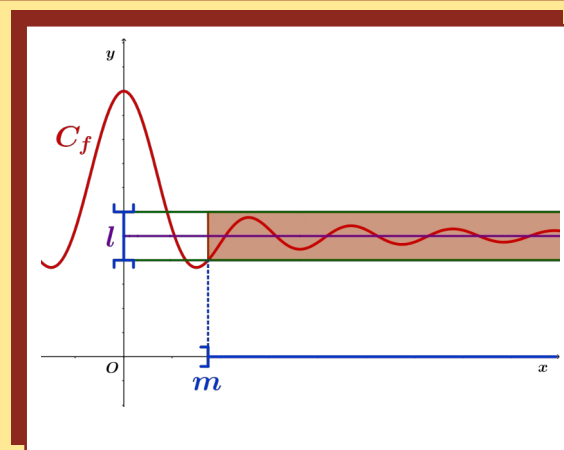
I.2 Limite finie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et l un réel.

La fonction f admet une limite finie égale à l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle J contenant l , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) \in J$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou $-\infty$.

On a pour tout réel k et tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

II. Limite en un point

II.1 Limite infinie

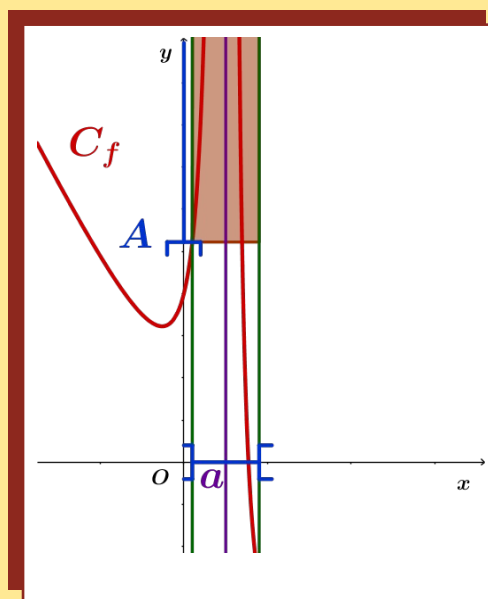
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel étant une borne de I .

- La fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) > A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- La fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) < A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.



Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a .

II.2 Limite à gauche, limite à droite

- On dit que f admet une **limite à droite en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- On dit que f admet une **limite à gauche en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Soit a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
La fonction f a une limite infinie en a si f possède une limite à gauche en a , une limite à droite en a (infinies) et que ces **limites sont égales**. On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

II.3 Limite finie

Une fonction f admet une limite finie l en a lorsque $f(x)$ est aussi proche de l que voulu pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

III. Opérations sur les limites

III.1 Limites d'une somme de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.2 Limites d'un produit de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.3 Limites d'un quotient de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	0 et $g(x) < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

IV. Théorèmes sur les limites

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré.

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la **limite en l'infini du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$. On définit la composée de g par f comme la fonction définie sur I par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} f \circ g : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) \end{array}$$

Limite d'une composée de fonctions (hors programme)

Soit les fonctions f et g et trois nombres a , b et c désignant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

V. Limites et comparaison

Soit f , g et h trois fonctions définies un intervalle ouvert I et l et a deux réels tel que a appartient à I ou a est une borne de I . Si pour tout $x \in I$, on a :

Théorème de comparaison

- $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème d'encadrement

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Dérivation et convexité

I. Rappels sur la dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel de I . Soit h un nombre réel non nul suffisamment petit.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, qu'on note $f'(a)$ et qu'on appelle nombre dérivé de la fonction f en a . On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ si et seulement si f est croissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$ si et seulement si f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a , alors la fonction f admet un extremum local en a .

II. Compléments sur la dérivation

II.1 Fonction composée

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans un intervalle J et v une fonction définie sur un intervalle J .

La composée de u par v , notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} v \circ u : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{v} & v(u(x)) \end{array}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I par $g(x)=ax+b$, où a et b sont des réels tels que $g(x)\in J$ pour tout $x\in I$.
Alors la fonction $f\circ g$ est dérivable sur I , et on a pour tout réel $x\in I$, $(f\circ g)'(x)=a f'(ax+b)$.

II.2 Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa fonction dérivée.
La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I .
On note f'' la dérivée de f' . Elle est appelée **dérivée seconde** de f .

III. Tableaux des dérivées

DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=x^n$, $n\geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}, v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}, v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}, u(x) \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n, n \geq 1$	$nu' u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}, n \geq 1 \text{ et } u(x) \neq 0$	$-n \frac{u'}{u^{n+1}}$
e^u	$u' e^u$
$f(ax+b), ax+b \in J \text{ pour tout } x \in I$	$af'(ax+b)$

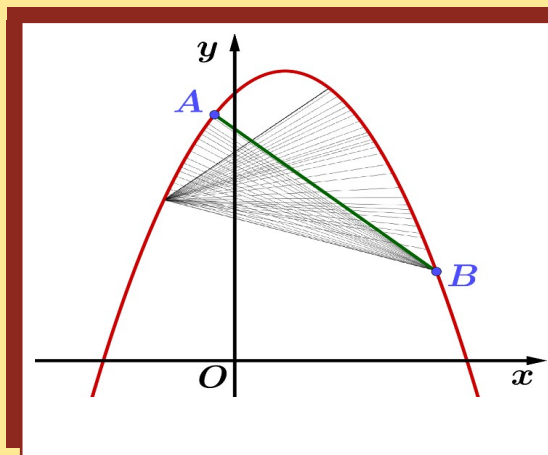
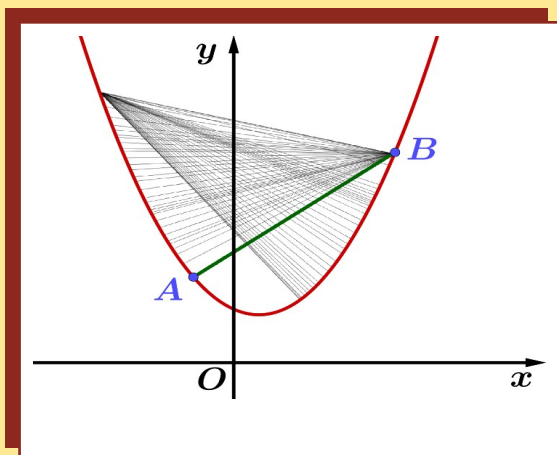
IV. Convexité

IV.1 Fonctions convexes et concaves

Soit f une fonction, C_f sa courbe représentative dans un repère et A et B deux points de C_f . Alors la droite (AB) est appelée **sécante** de C_f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère.

- f est **convexe** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **en dessous de ses sécantes**.
- f est **concave** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **au-dessus de ses sécantes**.



- Les fonctions carrée et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $] 0; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f est une fonction convexe sur I , alors $-f$ est concave sur I .
- Si f est une fonction concave sur I , alors $-f$ est convexe sur I .

IV.2 Convexité des fonctions dérivables

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f'' est **positive** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f'' est **négative** sur I .

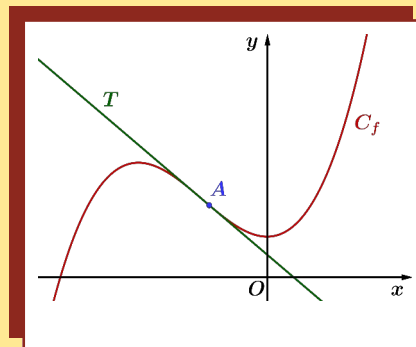
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I .

Si f'' est **positive** sur I , alors la courbe représentative de f est **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

IV.3 Point d'inflexion

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique de f traverse sa tangente. Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, alors la fonction change de convexité.



Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

f' change de sens de variations sur I en a si et seulement si sa courbe $C_{f'}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a . Ce point a pour coordonnées $(a; f'(a))$.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a . Ce point a pour coordonnées $(a; f(a))$.

Continuité

I. Notion de continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est **continue** sur I si lorsque l'on trace la courbe de la fonction f , on ne lève pas le crayon. On dit qu'il n'y a pas de « saut » dans la représentation graphique de la fonction f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I .

- La fonction f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur I** si elle est continue en tout point de I .

• Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

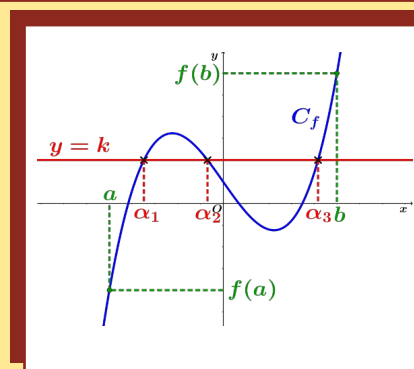
• La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue sur I .

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ **admet au moins une solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Théorème de Bolzano

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

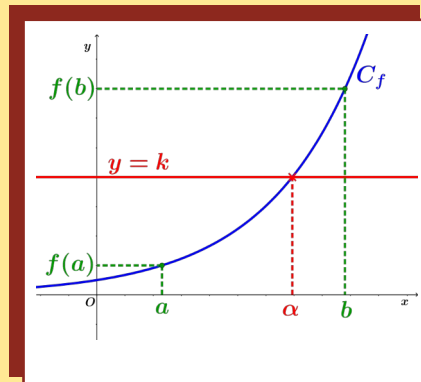
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe **au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$** .

III. Fonctions continues et strictement monotones

Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

- L'image de l'intervalle $[a; b]$ par la fonction f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.
- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une unique solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Remarques

- Le terme « bijection » signifie qu'une image par la fonction f n'admet qu'un seul antécédent.
- On appelle aussi ce théorème le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
- Le corollaire s'applique aussi dans le cas d'un intervalle semi ouvert ($[a; b[$ ou $]a; b]$) ou d'un intervalle ouvert ($]a; b[$). On remplace alors le calcul de $f(a)$ (ou de $f(b)$) par le calcul de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (ou de $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$), a et b pouvant être des réels, $-\infty$ ou $+\infty$.
- Ce corollaire permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation que l'on ne sait pas résoudre par le calcul. On cherche alors une valeur approchée de cette solution.

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

IV. Méthodes

Méthode d'encadrement d'une solution par balayage

Avec la calculatrice on construit un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir de $x=a$ avec un pas de 1 (à l'aide des touches « 2nde » et « déf table »).

On peut en déduire l'appartenance de la solution à un intervalle d'amplitude 1. On note $[p; p+1]$ cet intervalle. Puis on fait un tableau de valeurs à partir de $x=p$ avec un pas de 0,1 et on réitère ce procédé en diminuant le pas à chaque étape, jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Le principe de la dichotomie est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Ainsi, on calcule le centre m de l'intervalle et on teste si la solution se trouve dans $[a, m]$ ou $[m; b]$.

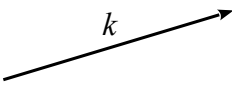
Si la solution est dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$), on recommence ce procédé dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$).

Méthode générale de résolution

En pratique, pour montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[a;b]$, on peut procéder ainsi :

- On calcule la dérivée de f afin d'obtenir son signe ;
- On construit le tableau de variations de f sur l'intervalle $[a;b]$;
- Chaque « flèche oblique » traduisant la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur un intervalle, on conclut sur l'unicité de la solution.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$



Si l'on souhaite donner le signe de f , on détermine les éventuels intervalles où la fonction s'annule, c'est-à-dire les intervalles $[a;b]$ pour lesquels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Méthode : Solution d'une équation du type $f(x)=k$

Soit la fonction f définie sur $[2;3]$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.

On souhaite démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[2;3]$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

- On calcule la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

- On étudie le signe de la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $3x > 0$ et $x-2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;3]$ (car elle ne s'annule qu'en un point isolé).

- On construit le tableau de variations de f :

x	2	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2	2

$$f(2)=2^3-3 \times 2^2+2=8-12+2=-2 \text{ et } f(3)=3^3-3 \times 3^2+2=27-27+2=2$$

- On utilise le TVI (ou le corollaire) :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$. De plus, l'image de l'intervalle $[2;3]$ par la fonction f est l'intervalle $[-2;2]$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .

- On utilise la calculatrice pour déterminer un encadrement de la solution :

X	Y
2	-2
2,1	-1,969
2,2	-1,872
2,3	-1,703
2,4	-1,456
2,5	-1,125
2,6	-0,704
2,7	-0,187
2,8	0,432
2,9	1,159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y
2,7	-0,187
2,71	-0,13
2,72	-0,072
2,73	-0,012
2,74	0,048
2,75	0,1094
2,76	0,1718
2,77	0,2352
2,78	0,2998
2,79	0,3653
2,8	0,432

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note $\exp(x) = e^x$.

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n , on a :

- | | | |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $e \approx 2,718$ • $e^x \times e^{-x} = 1$ • $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $e^0 = 1$ • $e^x \neq 0$ • $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $e^1 = e$ • $e^{x+y} = e^x \times e^y$ • $(e^x)^n = e^{nx}$ |
|---|---|--|

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Signe

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

III.2 Variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

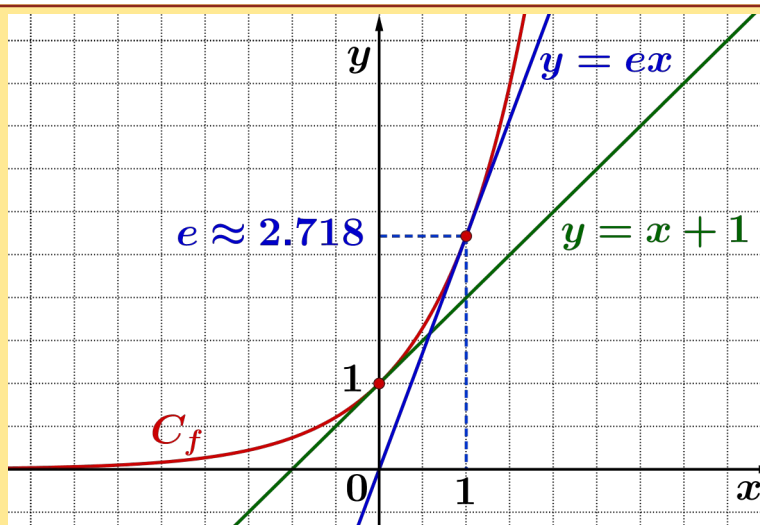
III.3 Limites (hors programme)

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ |
|---|---|

III.4 Tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			
$f(x)$				

III.5 Représentation graphique



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $T_0 : y = x + 1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1 : y = ex$.

IV. Lien avec les suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a . Alors :

- Si $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = +\infty$.
- Si $a < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = 0$.

V. Équations de inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- Si $x \leq 0$, alors $0 < e^x \leq 1$
- Si $x \geq 0$, alors $1 \leq e^x$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction e^u définie par $x \rightarrow e^{u(x)}$ est appelée exponentielle de u .
- La fonction $x \rightarrow e^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

Fonction logarithme népérien

I. Généralités sur la fonction logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien** est la fonction **réciroque** de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est noté $\ln$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \ln(x)$.

Relation entre les fonctions exp et ln

Pour tout y réel strictement positif et x réel, on a :

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$
- $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(y)} = y$

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels strictement positifs x et y et tout entier relatif n , on a :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

III.2 Signe

- La fonction logarithme népérien est **négative** sur $]0; 1]$. Pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln(x) \leq 0$.
- La fonction logarithme népérien est **positive** sur $[1; +\infty[$. Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$.

III.3 Variation

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.4 Limites

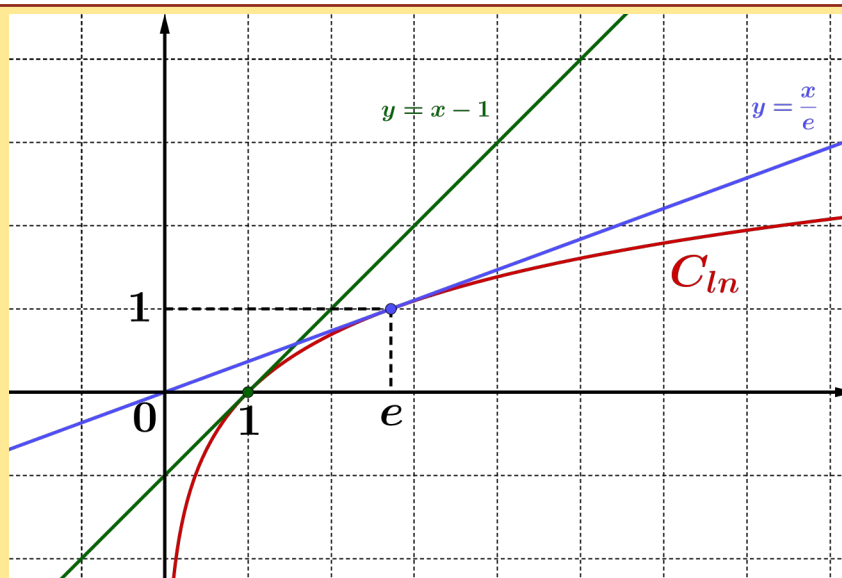
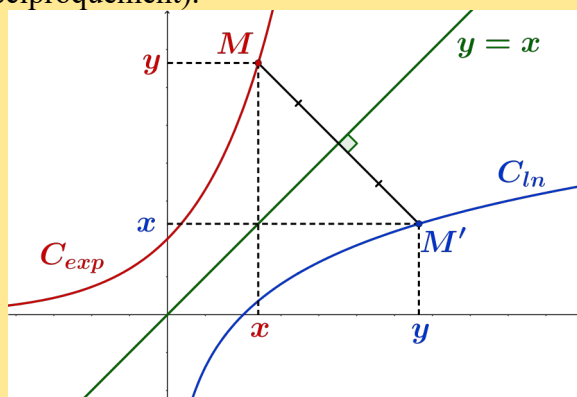
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

III.5 Tableau

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$ $		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

III.6 Représentation graphique

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien peut être obtenue comme la courbe image de la représentation de la fonction exponentielle par la symétrie d'axe la droite $y=x$ (et réciproquement).



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1: y = x - 1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse e est $T_e: y = \frac{x}{e}$.

IV. Équations de inéquations

Pour tous réels strictement positifs x et y , on a :

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow 0 < x < y$
- $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y > 0$

Pour tout réel x strictement positif et tout réel y , on a :

- $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$
- $\ln(x) < y \Leftrightarrow 0 < x < e^y$
- $\ln(x) > y \Leftrightarrow x > e^y$

Attention !

Pour les équations et les inéquations avec les logarithmes, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être positives).

V. Fonctions composées $x \rightarrow \ln(u(x))$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

On considère la fonction composée f définie par $f = \ln \cdot u$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln(u(x))$. On la note aussi $f = \ln(u)$.

Soit f la fonction définie par $f = \ln(u)$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction f est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln(u(x))$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors la fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

VI. Fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée $\log$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarques

- $\ln(10) > 0$, donc le nombre $k = \frac{1}{\ln(10)}$ est strictement positif. Donc, de $\log(x) = k \ln(x)$, on en déduit que la fonction $\log$ a le même sens de variation que la fonction $\ln$.
- Toutes les propriétés analytiques de la fonction $\ln$ s'appliquent à la fonction $\log$.
- Les fonctions $\ln$ et $\log$ sont intégrées de manière distincte dans les calculatrices.

Utilisations du logarithme décimal

- En chimie, on exprime le caractère acido-basique d'une solution au moyen d'un indicateur noté pH . On a $pH = -\log [H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est exprimée en $mol.L^{-1}$.
- Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre est donnée par la formule $R = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, I étant l'intensité du tremblement de terre et I_0 une intensité minimale.
- La puissance d'un son est donnée en décibels par $10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, I_0 étant l'intensité la plus faible perceptible par l'oreille humaine.
- D'après la loi de Benford, lorsqu'on tire au hasard un nombre dans une série de nombres quelconques, la probabilité que le premier chiffre significatif soit le chiffre d est environ égale à $\log \left(1 + \frac{1}{d} \right)$. Ainsi, la probabilité que le premier chiffre significatif soit 1 est environ égale à $\log(2)$. Cette loi est utilisée en France pour détecter les fraudes fiscales.

Primitives et équations différentielles

I. Équation différentielle $y' = f$ et primitives

I.1 Équation différentielle $y' = f$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle $y' = f$** sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- Résoudre sur I une équation différentielle $y' = f$, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Remarques

- La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x , d'où le terme différentiel.
- On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \frac{dy}{dx}$ ou $y' = \frac{dy}{dt}$.

I.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Remarques

- D'après la définition, une primitive est toujours dérivable et donc continue.
- F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$. Résoudre sur I l'équation $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I .

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I .

Alors la fonction f **admet une infinité de primitives** sur I et toute primitive G de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue admettant une primitive sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Remarques

- La condition $F(x_0) = y_0$ est parfois appelée **condition initiale** en référence à certaines situations rencontrées en physique.
- En cinétique (étude des mouvements), l'utilisation des conditions initiales est primordiale pour obtenir les équations du mouvement et par la suite la loi horaire.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

II. Primitives et opérations

II.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$f(x)=k$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

II.2 Primitives de $f+g$ et de kf avec k un réel

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions continues f et g sur un intervalle I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction continue f sur un intervalle I et si k est un réel, alors kF est une primitive de kf sur I .

II.3 Primitives des fonctions composées (hors programme)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
La fonction composée $v \circ u$ est une primitive sur I de $u'(v' \circ u)$.

Les dérivées de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées. On obtient donc le tableau des fonctions composées suivant, où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de dérivée continue sur I .

Fonction f	Primitive F	Conditions
$u' u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u} = u' u^{-1}$	$\ln(u)$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout $x \in I, u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	

Remarques

- On pourra vérifier le résultat en dérivant la primitive obtenue et ainsi voir si l'on retombe sur f .
- Trouver une primitive n'est pas toujours chose facile. Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive. Parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue, elle est alors uniquement définie par une intégrale (par exemple une primitive de e^{-x^2}). Contrairement à la dérivation qui est toujours possible, la recherche de primitive s'avère donc parfois impossible.

Attention !

Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour obtenir une forme connue.

III. Équations différentielles**III.1 Définition**

- Une **équation différentielle** est une égalité reliant une fonction dérivable et ses dérivées successives, et éventuellement d'autres fonctions.
- Une **solution d'une équation différentielle** est une fonction dérivable qui vérifie cette égalité.

Remarques

- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.
- Une équation différentielle met en jeu une fonction et ses dérivées successives. Cependant, nous nous limiterons essentiellement dans ce chapitre à l'étude des **équations différentielles du premier ordre**, c'est-à-dire les équations différentielles reliant une fonction dérivable à sa dérivée première.
- De même que pour une dérivée première, on peut être amené à utiliser l'écriture différentielle

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

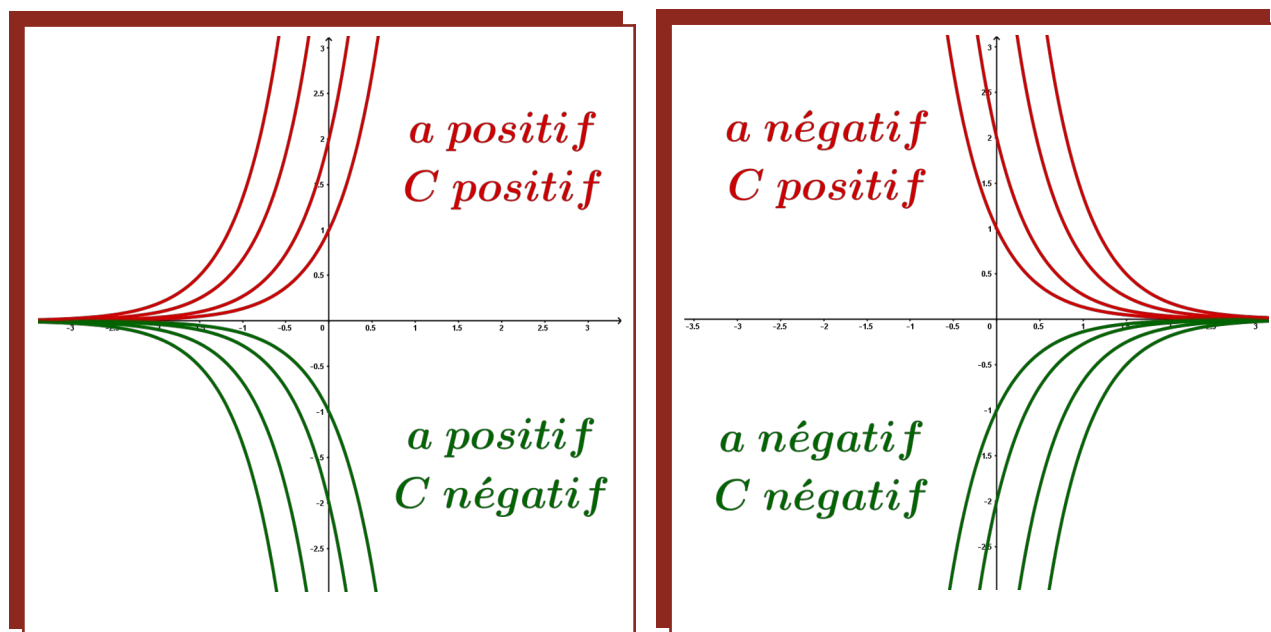
III.2 Équation différentielle $y' = ay$

Soit a un réel. L'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ est appelée **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

Les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Allures des courbes

Les courbes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ont les allures suivantes :



Soit $(E_0): y' = ay$ une **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants** et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe une unique solution y_0 de (E_0) telle que $y(x_0) = y_0$.

Soit y_1 et y_2 deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $(E_0): y' = ay$ une équation différentielle et k un réel. Si les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle (E_0) , alors $y_1 + y_2$ et ky_1 sont aussi solutions de (E_0) .

III.3 Équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Soit a et b des réels tels que $a \neq 0$. L'équation différentielle $(E): y' = ay + b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Les solutions de l'équation différentielle (E): $y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel.

III.4 Équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

Soit a un réel non nul et f une fonction continue. L'équation différentielle (E): $y' = ay + f$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle (E): $y' = ay + f$.
Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} + \phi(x)$, où C est un réel.

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle (E): $y' = ay + f$.
Alors y est une solution de (E) si et seulement si $y - \phi$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$.

Méthode : Résolution de l'équation différentielle (E): $y' = ay + f$

- On détermine une solution particulière ϕ de l'équation (E).
- On écrit l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$ et ses solutions $x \mapsto Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- On détermine toutes les solutions de l'équation (E) en effectuant la somme des solutions de (E_0) et de ϕ .

Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction continue positive

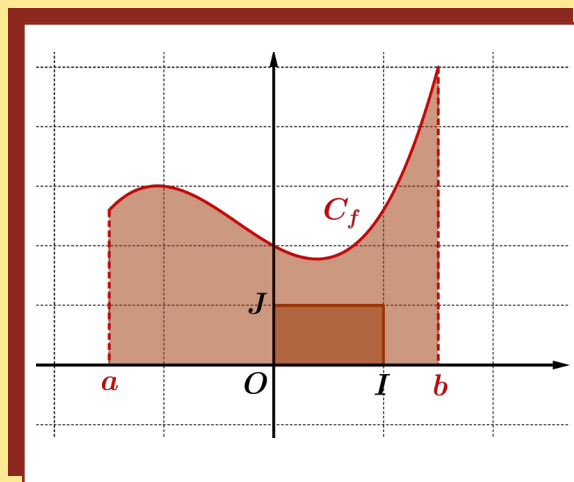
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$) et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$. On appelle :

- **unité d'aire** l'aire du rectangle construit à l'aide des points O , I et J . On la note **u.a.** .

- **Domaine sous la courbe** le domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Ce domaine est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$

- **Intégrale de f sur $[a; b]$** la mesure de l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe.

On la note $\int_a^b f(x) dx$.



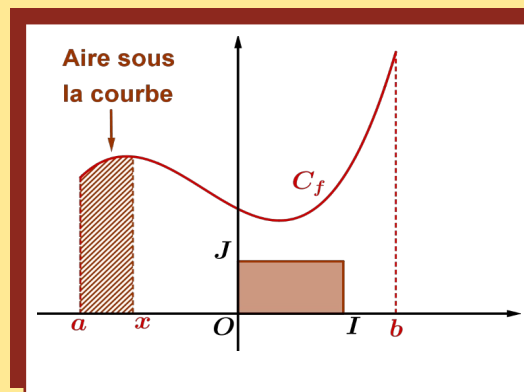
II. Primitive d'une fonction continue

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie par

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f . Ainsi $F' = f$.

La fonction F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .



Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

III. Intégrale d'une fonction continue quelconque

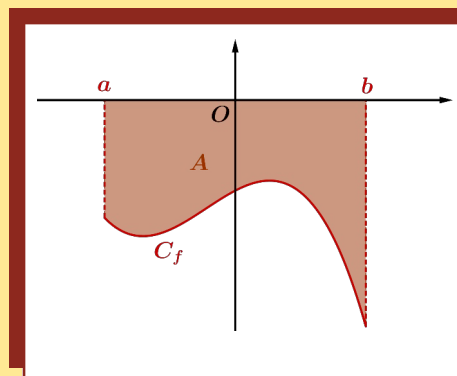
Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f et a et b deux réels de I . L'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle I et a et b deux réels de I .

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$, et on note $\int_a^b f(x) dx$, l'opposé de l'aire A , en unités d'aire, délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

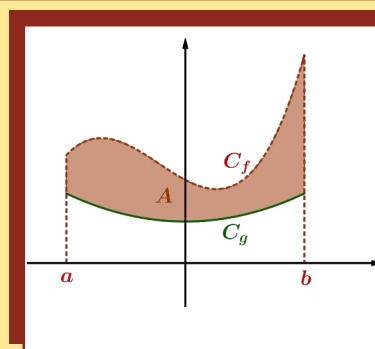
Ainsi $A = -\int_a^b f(x) dx$.



Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$.

On appelle A l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Ainsi $A = \int_a^b (f - g)(x) dx$.



IV. Propriétés de l'intégrale

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle I et α et β des réels.

- Pour tout $a \in I$, $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
- **Relation de Chasles** : Pour tout $(a; b; c) \in I^3$, $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
- **Linéarité** : Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Parité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$.

Remarques

- Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b des réels de I tels que $a \leq b$.

Positivité

- Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

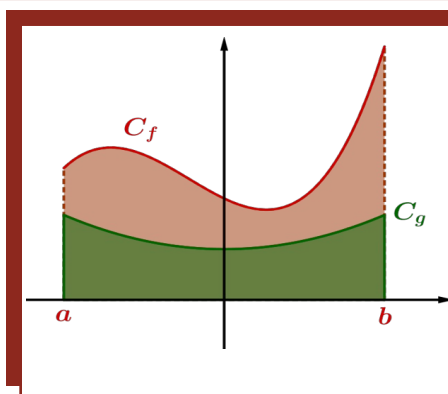
- Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Inégalité

Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Remarque

Dans le cas où f et g sont positives sur $[a; b]$, si $f(x) \geq g(x)$ alors l'aire sous la courbe représentative de f est inférieure ou égale à l'aire sous la courbe représentative de g .

**Valeur moyenne**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

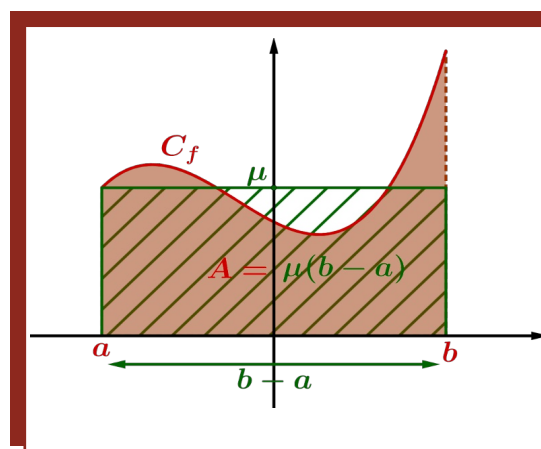
Interprétation graphique

La valeur moyenne μ est telle que :

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Ainsi, lorsque f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, la valeur moyenne μ peut-être interprété comme la hauteur du rectangle de base $b-a$ et ayant la même aire que le domaine A sous la courbe C_f .

Ainsi $A = \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$.



Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
 Soit deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Interprétation graphique

Si la fonction f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne traduit le fait que l'aire sous la courbe C_f sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .

