Généralités sur les fonctions

I. Définitions

• Définir une fonction f sur l'ensemble D consiste à associer, à chaque réel x de D, un unique nombre réel y.
• D s'appelle l'**ensemble de définition** de la fonction f.
• y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$.
• x est un **antécédent** de y par la fonction f.

II. Différentes façons de définir une fonction

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in \mathrm{D}$.
L'**expression algébrique** de la fonction f donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in \mathrm{D}$.
Un **tableau de valeurs** de la fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Antécédent $\boldsymbol{x}$						
Image $\boldsymbol{f(x)}$						

La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ (ou $(x; y)$) où x parcourt le domaine de définition D de la fonction f.
Elle est souvent notée C_f.
L'**équation de cette courbe représentative** est $y = f(x)$.

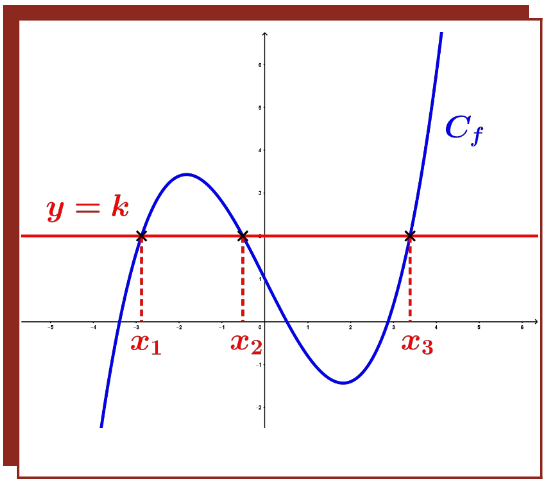
Un point M de coordonnées $(x; f(x))$ appartient à la courbe représentative C_f d'une fonction si et seulement si x appartient à D et $y = f(x)$.

Méthode algébrique
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.
• Déterminer une image
L'image de 7 par la fonction f est $f(7) = 3 \times 7 - 5 = 21 - 5 = 16$.
• Déterminer un antécédent
L'antécédent de 4 par la fonction f est tel que $f(x) = 4$.
On a $f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 5 = 4 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$. Ainsi l'antécédent de 4 par la fonction f est 3.
• Déterminer si un point appartient à une courbe
Le point $\mathrm{A}(1; -2)$ appartient à la courbe C_f représentative de f si et seulement si $f(1) = -2$.
On a $f(1) = 3 \times 1 - 5 = 3 - 5 = -2$. Ainsi $\mathrm{A} \in \mathrm{C}_f$.

III. Résolution graphique d'équation et d'inéquation

III.1 Résolution d'équation du type $f(x)=k$

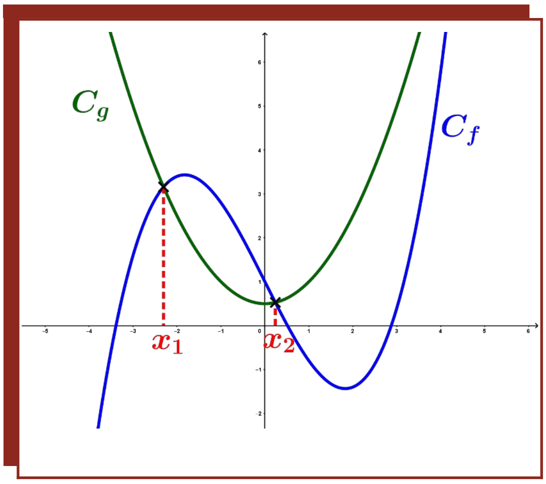
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x)=k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont pour image k par la fonction f**. Ceci revient à déterminer l'**ensemble des antécédents de k par f**.



Graphiquement, les solutions de $f(x)=k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnées k**. On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y=k$.

III.2 Résolution d'équation du type $f(x)=g(x)$

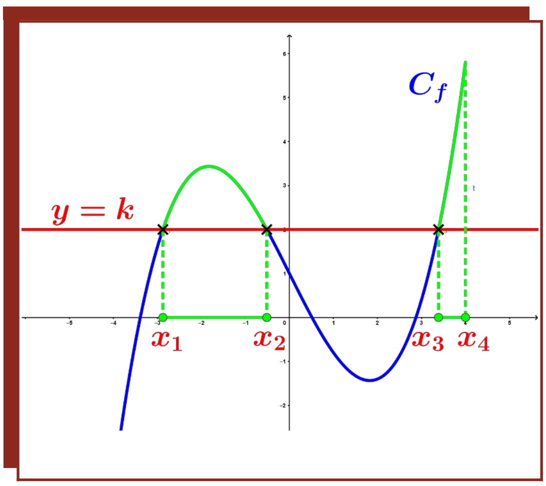
Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.
Résoudre $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer **tous les réels x de D qui ont la même image par f et g**.



Graphiquement, les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g**.

III.3 Résolution d'inéquation

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x)\geqslant k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont une image supérieure ou égale à k par la fonction f**.



Graphiquement, les solutions de $f(x)\geqslant k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant une ordonnée supérieure ou égale à k**. On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de la droite d'équation $y=k$.

IV. Variations d'une fonction

IV.1 Sens de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
• Dire que f est **croissante** sur I (respectivement **strictement croissante** sur I) signifie que, pour tous réels a et b de I, si $a<b$, alors $f(a)\leqslant f(b)$ (respectivement si $a<b$, alors $f(a)<f(b)$).
• Dire que f est **décroissante** sur I (respectivement **strictement décroissante** sur I) signifie que, pour tous réels a et b de I, si $a<b$, alors $f(a)\geqslant f(b)$ (respectivement si $a<b$, alors $f(a)>f(b)$).
• Dire que f est **constante** sur I signifie que, pour tous réels a et b de I, $f(a)=f(b)$.
• Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est croissante sur I ou décroissante sur I.

IV.2 Tableau de variations

Pour représenter les variations d'une fonction f, on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possibles.
Il fait apparaître les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante par une flèche montante** et ceux sur lesquels la fonction est **décroissante par une flèche descendante**. De plus, si on les connaît, on écrit les **images au bout des flèches**.
L'ensemble forme le **tableau de variations** de la fonction f.

IV.3 Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=\mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\leqslant\mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le **maximum** (respectivement **minimum**) de f sur J.

V. Étude du signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

VI. Quelques fonctions de référence

Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

VI.1 Fonctions affines

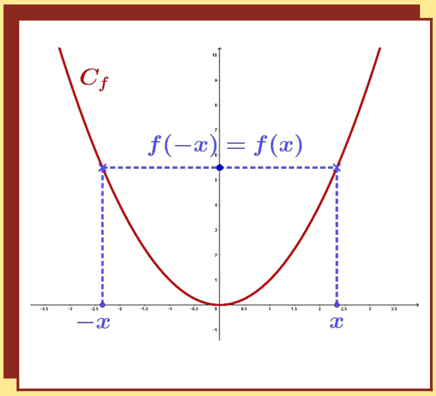
Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.
La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.
• Si $a>0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
• Si $a<0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
• Si $a=0$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre : $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

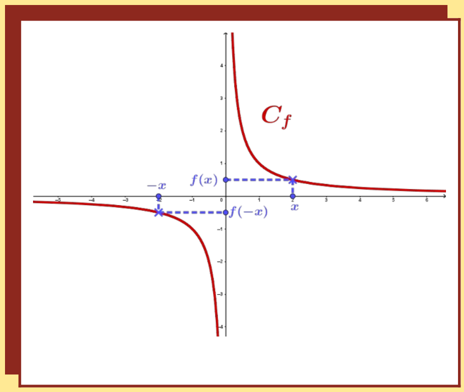
VI.2 Fonction carrée

• La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
• Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Elle est appelée **parabole**.



VI.3 Fonction inverse

• La **fonction inverse** est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
• Elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**. Elle est appelée **hyperbole**.
• La fonction inverse admet une **valeur interdite en 0**.



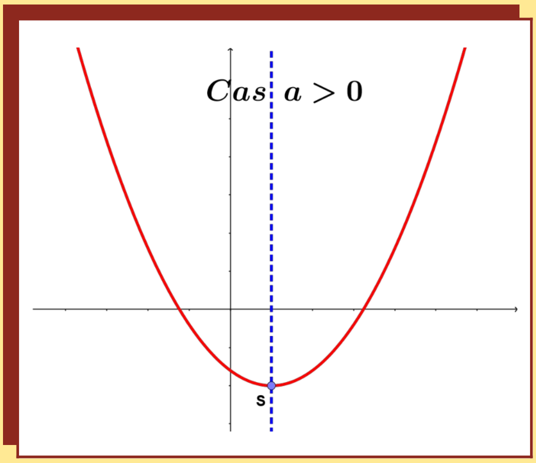
Étude des fonctions polynomiales du second degré

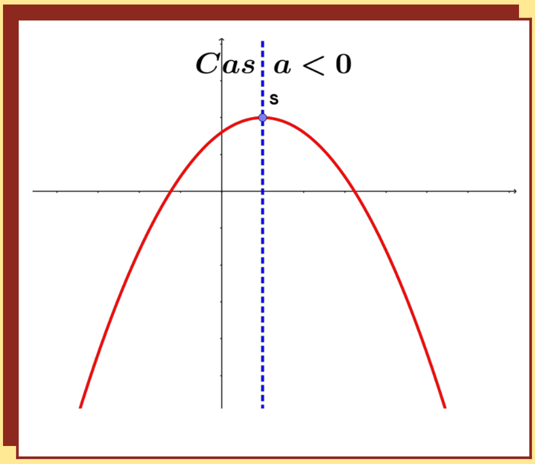
I. Fonctions polynômes du second degré

I.1 Définitions

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a , b et c sont des nombres réels et $a\neq 0$.
Cette expression est appelée **forme développée** de f .

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole**.
Une parabole a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.
A l'inverse, si a est négatif, la parabole a une forme de « pont » (« tournée vers le bas »).
Dans les deux cas, la parabole possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$.
On appelle généralement **S le sommet** d'une parabole.
S a pour coordonnées $(\alpha;\beta)$ où $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.





Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-12x+23$.
a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x)=2(x-3)^2+5$.
b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2e expression, on obtient :
$(2(x-3))^2+5=2(x^2-6x+9)+5=2x^2-12x+18+5=2x^2-12x+23=f(x)$.
b. On regarde le signe de a : $a=2>0$.
La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.
Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x=3$.

I.2 Sens de variations

Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.
• Si $a>0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.
Elle admet comme minimum β en $x=\alpha$.
• Si $a<0$, f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.
Elle admet comme maximum β en $x=\alpha$.

Cas a>0

x	$-\infty$	$\alpha=\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$\beta=f(\alpha)$	$\nearrow$

Cas a<0

x	$-\infty$	$\alpha=\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	$\beta=f(\alpha)$	$\searrow$

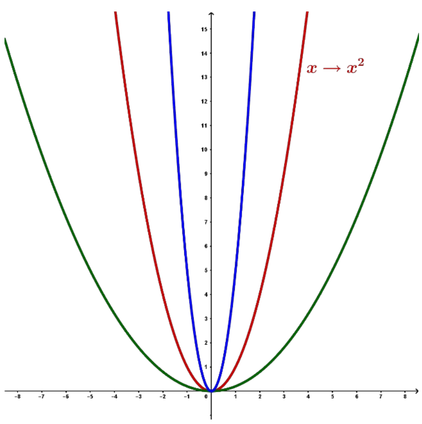
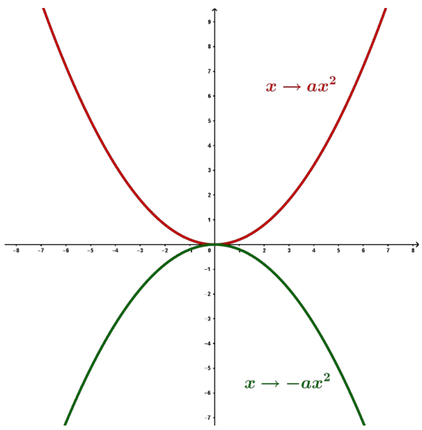
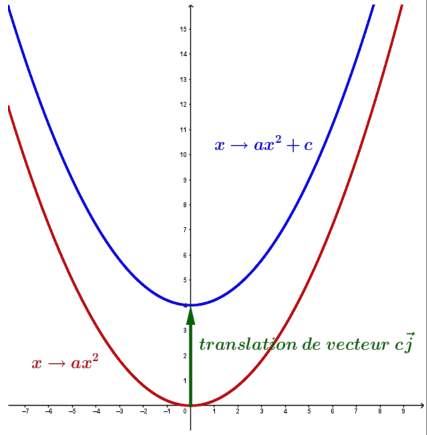
La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\alpha$ et pour sommet le point de coordonnées $(\alpha;\beta)$.

Méthode : Établir les variations d'une fonction du second degré
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4x$.
a. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.
b. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum. Justifier.
c. Construire le tableau de variations de f, puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. On calcule les coordonnées du sommet S :
On a $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times(-1)}=-\frac{4}{-2}=2$ et $\beta=f(\alpha)=f(2)=-2^2+4\times2=-4+8=4$.
Donc $S(2;4)$.
b. On regarde le signe de a : $a=-1<0$.
La parabole est « tournée vers le bas », donc f admet un maximum. Ce maximum est 4.
c. Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

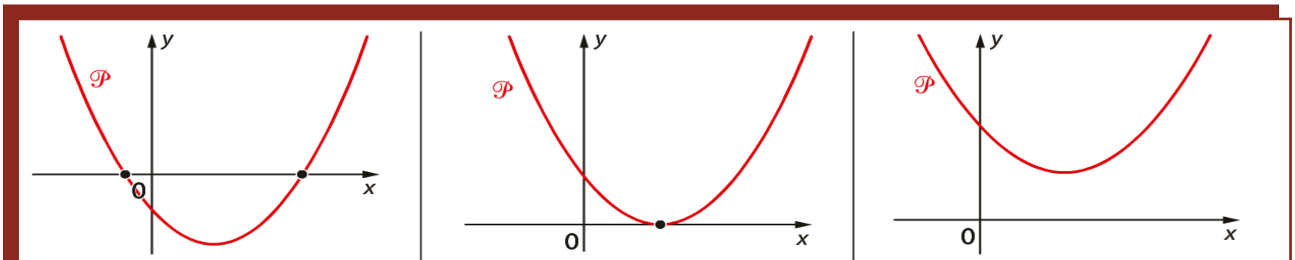
I.3 Fonctions particulières $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2+c$

Influence du coefficient a ($a>0$)	**Passage de $a>0$ à $a<0$**	**Influence du coefficient c**
		
L'axe de symétrie des différentes courbes est la droite d'équation $x=0$ Cas : $a>1$ Plus a est grand et plus la courbe « se contracte » Cas : $0<a<1$ Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -ax^2$ est symétrique à celle de la fonction $x \rightarrow ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2+c$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $c\vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2$

II. Équation du second degré

II.1 Approche graphique

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, où $a \neq 0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme.
Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$.
Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.



$\mathscr{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses. | $\mathscr{P}$ coupe une fois l'axe des abscisses. | $\mathscr{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

II.2 Vocabulaire

Une **équation du second degré**, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels, avec $a\neq 0$.
Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme ax^2+bx+c.

III. Fonctions polynômes du second degré admettant deux racines

III.1 Forme factorisée

Soit f une fonction du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$. On a la factorisation suivante :
• Si f admet **deux racines** $\boldsymbol{x_1}$ **et** $\boldsymbol{x_2}$, alors on a pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
• Si f admet **une racine double** $\boldsymbol{x_0}$, alors on a pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_0)^2$.

Remarque
Si $x_1=x_2$, alors on dit que f admet une racine double que l'on note x_0.

La représentation graphique des fonctions de la forme $x\rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$ est une parabole d'axe de symétrie la droite d'équation $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.
L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

III.2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction polynomiale $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$.
• Si f admet deux racines x_1 et x_2, alors $f(x)$ s'annule pour $x=x_1$ et $x=x_2$ (on suppose que $x_1<x_2$) et alors :
‣ le signe de $f(x)$ est **du signe de** $\boldsymbol{a}$ pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
‣ le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de** $\boldsymbol{a}$ si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

• Si f admet une racine double, alors $f(x)$ s'annule pour $x=x_0$: **son signe est celui de** $\boldsymbol{a}$ pour tous les réels $x\neq x_0$.

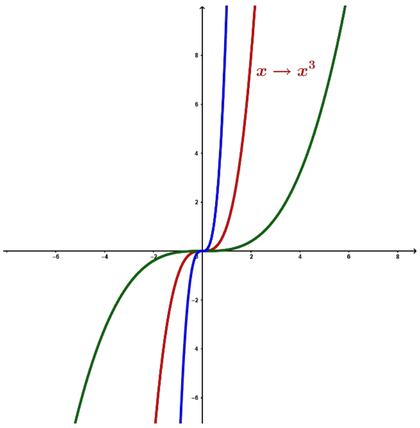
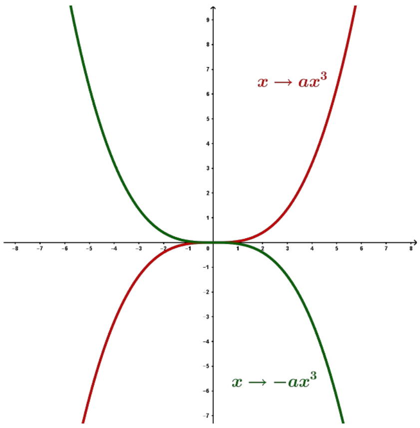
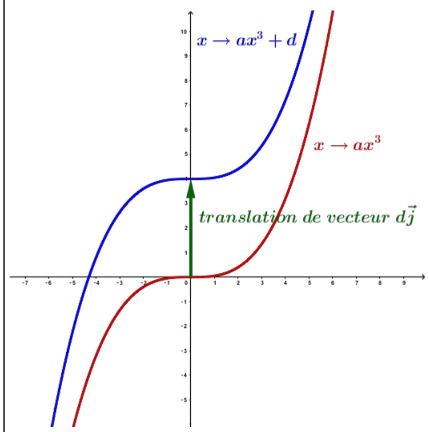
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

Étude des fonctions polynomiales du troisième degré

I. Fonctions polynômes du troisième degré

On appelle **fonction polynôme du troisième degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels et $a \neq 0$.
Cette expression est appelée **forme développée** de f.

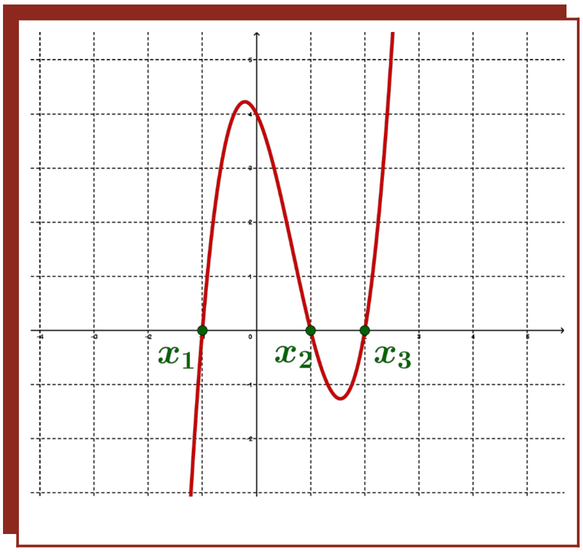
II. Fonctions particulières $x \to ax^3$ et $x \to ax^3+d$

Influence du coefficient a **($a>0$)**	**Passage de $a>0$ à $a<0$**	**Influence du coefficient d**
		
Les courbes représentatives des fonctions $x \to ax^3$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère Cas : $a>1$ Plus a est grand et plus la courbe « se contracte » Cas : $0<a<1$ Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »	La courbe représentative de la fonction $x \to -ax^3$ est symétrique à celle de la fonction $x \to ax^3$ par rapport à l'origine du repère	La courbe représentative de la fonction $x \to ax^3+d$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $d\vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \to ax^3$

III. Forme factorisée

Soit f une fonction du troisième degré de la forme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, avec $a \neq 0$.
Si f admet trois racines x_1, x_2 et x_3, alors f est factorisable et on a :
Pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Lien avec la courbe représentative



Les racines de f se lisent directement sur le graphique. Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de l'axe des abscisses.

IV. Signe d'une fonction polynôme de degré 3

Le signe de $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ s'obtient à l'aide d'un tableau de signes, après avoir étudié le signe de $a(x-x_1)(x-x_2)$ et $x-x_3$.

V. Équation du type $x^3=c$

Soit c un réel positif. L'équation $x^3=c$ possède une unique solution qui est $x=c^{\frac{1}{3}}$, que l'on note aussi $\sqrt[3]{c}$.

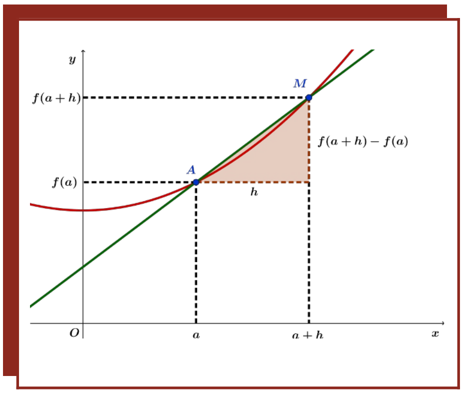
Dérivation

I. Nombre dérivé

I.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b. Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



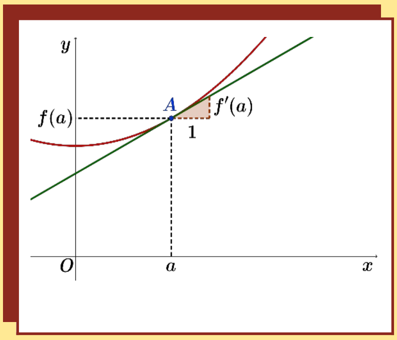
Remarques
- $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de t lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
- Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $\mathrm{A}(a;f(a))$ et $\mathrm{M}(a+h;f(a+h))$.

On appelle cette droite une sécante à la courbe.

I.2 Nombre dérivé

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a. Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a, et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)$, soit $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $\mathrm{A}(a,f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Lorsque f est dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $\mathrm{A}(a;f(a))$ dont **le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$**.

Soit f une fonction dérivable en a. L'**équation** de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $\mathrm{T}: y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

II. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarque
Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$\text{D}_{f'}$
$f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$

IV. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $a_n\neq 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$.

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
ku , $k\in\mathbb{R}$	ku'

V. Sens de variation d'une fonction

V.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• Si f est **croissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$.
• Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$.
• Si f est **constante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.

Remarque
Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

V.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, alors la fonction f est **constante** sur I.
• Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I.

Remarques
Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera :
• la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.
• la continuité (ou absence de rupture) de la courbe C_f sur cet intervalle.

VI. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=\mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est un **maximum** ou un **minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.

Remarques
• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
• Graphiquement, il s'agit pour le maximum du plus haut "sommet" de la courbe, et pour le minimum du plus bas "sommet" de la courbe.