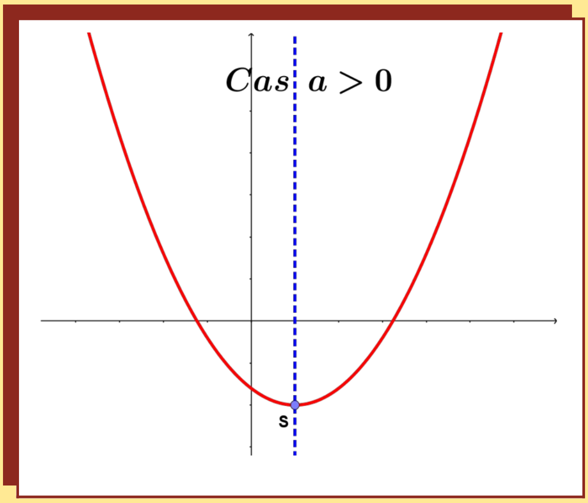
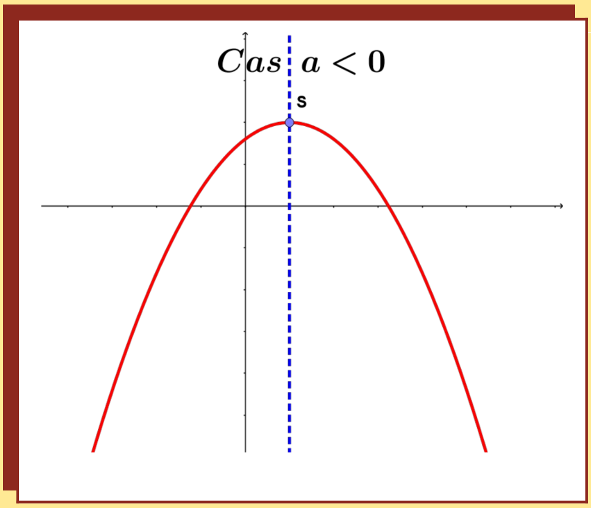
Équations du second degré

I. Fonction polynôme du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a\neq 0$.
Cette expression est appelée **forme développée** de f.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole** telle que :
- Elle a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.
- Elle a une forme de « pont » (« tournée vers le bas ») lorsque a est négatif.
- Le point $\mathbf{S}(\alpha;\beta)$ est son **sommet** où $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.
- Elle possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x=\alpha$.





Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
La parabole qui représente la fonction f :
- coupe l'axe des ordonnées au point $\mathrm{C}(0;c)$.
- peut, selon les cas, couper l'axe des abscisses en deux points, un seul ou aucun.

Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$, on peut trouver deux nombres réel α et β tels que pour tout nombre x, on a :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \quad \text{avec} \quad \alpha=-\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta=f(\alpha)$$

Le sommet de la parabole est alors de coordonnées $(\alpha;\beta)$.
Cette expression est appelée forme canonique de f.

Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-12x+23$.

a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x)=2(x-3)^2+5$.

b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2e expression, on obtient :

$2(x-3)^2+5=2(x^2-6x+9)+5=2x^2-12x+18+5=2x^2-12x+23=f(x)$.

Autre méthode :
$$\begin{aligned}2x^2-12x+23&=2\left(x^2-6x+\frac{23}{2}\right)\\&=2\left(x^2-2\times3x+3^2-3^2+\frac{23}{2}\right)\\&=2\left((x-3)^2+\frac{5}{2}\right)\\&=2(x-3)^2+5\\&=f(x)\end{aligned}$$

b. On regarde le signe de a : $a=2>0$.

La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.

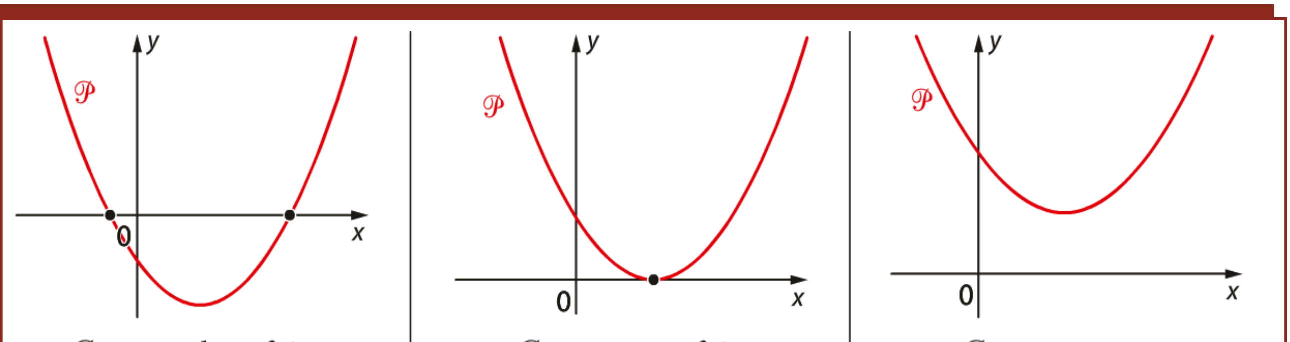
Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x=3$.

II. Équation du second degré

II.1 Approche graphique

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, où $a\neq0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme.

Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$. Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.



𝒫 coupe deux fois l'axe des abscisses. 𝒫 coupe une fois l'axe des abscisses. 𝒫 ne coupe pas l'axe des abscisses.

II.2 Vocabulaire

Une **équation du second degré**, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels, avec $a\neq 0$.
Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme ax^2+bx+c.

Le nombre réel b^2-4ac est appelé **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c. Il est noté Δ (se lit « delta »).

II.3 Résolution

Soit $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ une équation du second degré et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.
L'existence de racine pour l'équation ax^2+bx+c dépend du signe de Δ.

- Si $\Delta>0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a **deux racines réelles distinctes** :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a **une unique racine réelle** (appelée **racine double**) :

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta<0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ **n'admet aucune racine réelle**.

II.4 Propriétés des racines

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré avec $a\neq 0$. Si ce trinôme admet deux racines distinctes ou confondues, alors leur somme S et leur produit P vérifient les relations suivantes :

$$\mathrm{S}=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ et } \mathrm{P}=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $x^2-\mathrm{S}x+\mathrm{P}=0$.

Méthode : Déterminer les racines d'un polynôme à l'aide de leur somme et de leur produit
Trouvons, s'ils existent, deux nombres réels dont la somme est 4 et le produit 1.

S'ils existent, ces deux nombres vérifient $\mathrm{S}=4$ et $\mathrm{P}=1$ et sont solutions de l'équation $x^2-4x+1=0$.
On a $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 1=16-4=12$.
Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{12}}{2\times 1}=\frac{4-\sqrt{4\times 3}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{12}}{2\times 1}=\frac{4+\sqrt{4\times 3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

Les nombres recherchés sont $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

Étude des fonctions polynomiales

I. Fonction polynôme du second degré

I.1 Rappels

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a\neq 0$.
Cette expression est appelée **forme développée** de f.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole** telle que :
• Elle a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.
• Elle a une forme de « pont » (« tournée vers le bas ») lorsque a est négatif.
• Le point $\mathbf{S}(\alpha;\beta)$ est son **sommet** où $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.
• Elle possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x=\alpha$.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
La parabole qui représente la fonction f :
• coupe l'axe des ordonnées au point $\mathrm{C}(0;c)$.
• peut, selon les cas, couper l'axe des abscisses en deux points, un seul ou aucun.

Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$, on peut trouver deux nombres réel α et β tels que pour tout nombre x, on a :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=f(\alpha)$$

Le sommet de la parabole est alors de coordonnées $(\alpha;\beta)$.
Cette expression est appelée **forme canonique** de f.

I.2 Sens de variations

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
• Si $a>0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.
Elle admet comme minimum β en $x=\alpha$.
• Si $a<0$, f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.
Elle admet comme maximum β en $x=\alpha$.

Cas $a>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Cas $a<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

II. Signe d'un trinôme

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
On a la factorisation suivante :
• Si $\Delta>0$, alors on a pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
• Si $\Delta=0$, alors on a pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_0)^2$.
• Si $\Delta<0$, alors f ne se factorise pas.

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
• Si $\Delta>0$, $f(x)$ s'annule pour $x=x_1$ et $x=x_2$ (on suppose que $x_1<x_2$) et alors :
  ‣ le signe de $f(x)$ est **du signe de a** pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
  ‣ le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de a** si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

• Si $\Delta=0$, $f(x)$ s'annule pour $x=x_0$: **son signe est celui de a** pour tous les réels $x\neq x_0$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

• Si $\Delta<0$, $f(x)$ a le **même signe que a** pour tout réel x.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

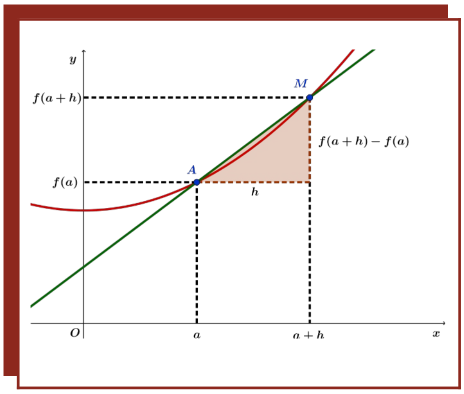
Dérivation

I. Nombre dérivé

I.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b. Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

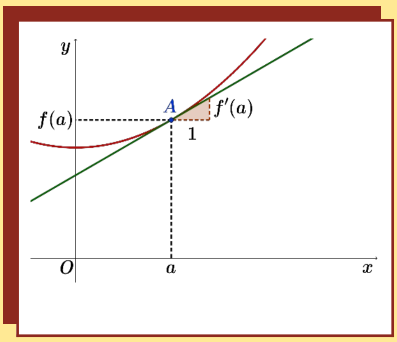


Remarques
• $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de t lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
• Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $\mathrm{A}(a;f(a))$ et $\mathrm{M}(a+h;f(a+h))$.
On appelle cette droite une sécante à la courbe.

I.2 Nombre dérivé

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a. Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a, et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)$, soit $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $\mathrm{A}(a,f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Lorsque f est dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $\mathrm{A}(a;f(a))$ dont **le coefficient directeur est le nombre dérivé $\boldsymbol{f'(a)}$**.

Soit f une fonction dérivable en a. L'**équation** de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $\mathrm{T}: y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

II. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarques
Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition, à l'exception des fonctions racine carrée et valeur absolue en 0.
• La tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point de coordonnées $(0;0)$ est verticale (c'est l'axe des ordonnées), d'équation $x=0$. Elle n'a donc pas de coefficient directeur. $f'(0)$ n'existe pas. La fonction racine carrée n'est donc dérivable que sur $]0;+\infty[$.
• La fonction valeur absolue n'est également pas dérivable en 0 : en effet, elle n'admet pas de tangente en ce point, du fait de l'angle droit qu'elle y fait. Ainsi, une courbe n'admet pas toujours une tangente en chacun de ses points.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$\mathrm{D}_{f'}$
$f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=x^n$, $n\geqslant 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\geqslant 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

Fonctions dérivées et applications

I. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=na_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que $g(x) \in \mathrm{J}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
On définit la **composée** de f et g comme la fonction définie sur I par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
On a le schéma suivant :

$$f \circ g : \begin{array}{ccccc} I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \underset{g}{\rightarrow} & g(x) & \underset{f}{\rightarrow} & f(g(x)) \end{array}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I par $g(x)=ax+b$, où a et b sont des réels tels que $g(x) \in \mathrm{J}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur I, et on a pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, $(f \circ g)'(x) = a f'(ax+b)$.

Soit u, v et g trois fonctions dérivables sur I et f une fonction dérivable sur J.

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
λu, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v+uv'$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{v}$, $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$, $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$, $u(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n, $n \geqslant 1$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$(f \circ g)(x)$, a et b réels et $g(x)=ax+b$	$(f \circ g)'(x) = a f'(ax+b)$

II. Sens de variation d'une fonction

II.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• Si f est **croissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$.
• Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$.
• Si f est **constante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)=0}$.

Remarque
Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

II.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)=0}$, alors la fonction f est **constante** sur I.
• Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative)** sur I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I.

Remarque
Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera dorénavant la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.

III. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=\mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\leqslant\mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I **ouvert** et a un réel de I.
Si f admet un extremum (local) sur I, atteint en $\boldsymbol{a}$, alors f'(a)=0.

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I **ouvert**, et a un réel de I.
Si la dérivée $\boldsymbol{f'}$ s'annule en changeant de signe en $\boldsymbol{a}$, alors $\boldsymbol{f'(a)}$ est un extremum (local) de $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbf{I}$.

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
On note $\mathbf{exp}(x)=\mathbf{e}^x$.

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a :

- $e\approx 2,718$
- $e^0=1$
- $e^1=e$
- $e^x\times e^{-x}=1$
- $e^x\neq 0$
- $e^{x+y}=e^x+e^y$
- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n=e^{nx}$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Signe

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$.

III.2Variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

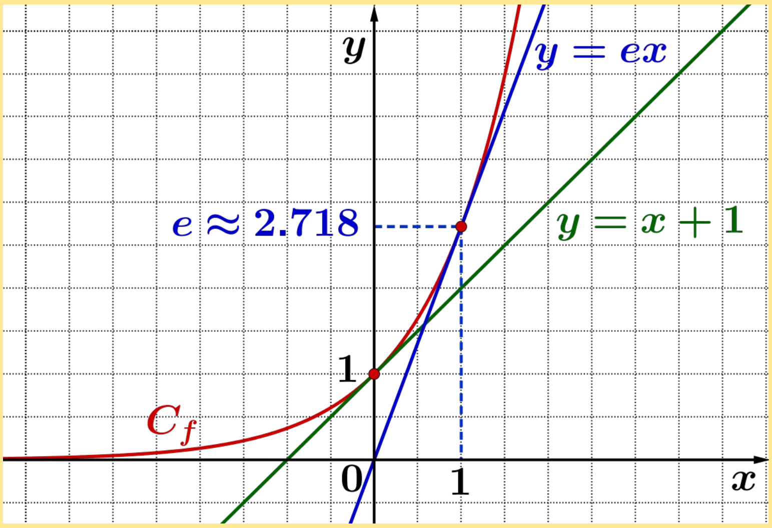
III.3 Limites (hors programme)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

III.4 Tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		
$f(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

III.5 Représentation graphique



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $T_0 : y = x + 1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1 : y = e\,x$.

IV. Lien avec les suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a . Alors :

- Si $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{na} = +\infty$.
- Si $a < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{na} = 0$.

V. Équations de inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- Si $x \leqslant 0$, alors $0 < e^x \leqslant 1$
- Si $x \geqslant 0$, alors $1 \leqslant e^x$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction e^u définie par $x \to e^{u(x)}$ est appelé exponentielle de u .
- La fonction $x \to e^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction f a le même sens de variation que la fonction u .