

Trigonométrie

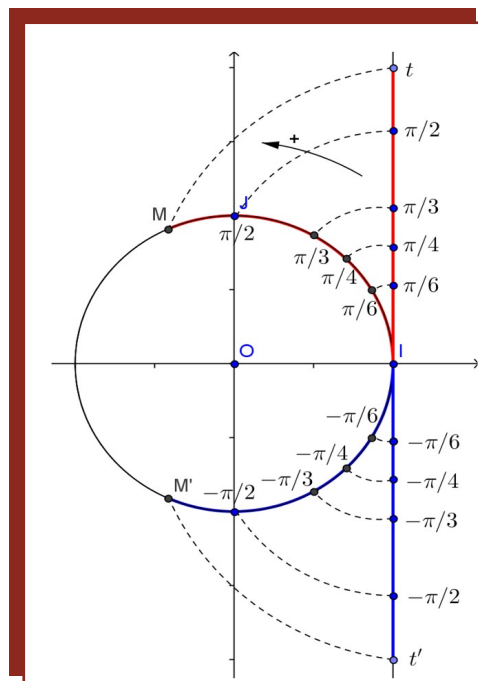
I. Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un sens de parcours, le sens direct ou indirect.

Enroulement de la droite des réels :

Soit d une droite numérique graduée dont le zéro coïncide avec le point I . Quand on enroule, sur le cercle C , la demi-droite des réels positifs dans le sens direct, et celle des réels négatifs dans le sens indirect, chaque réel t vient s'appliquer sur un point M du cercle C . On dit alors que M est l'image de t sur le cercle C .

La longueur (périmètre) du cercle trigonométrique étant 2π , deux réels t_1 et t_2 ont même point image sur C si et seulement si l'enroulement de la droite des réels entre t_1 et t_2 correspond à un nombre entier de tours de C .



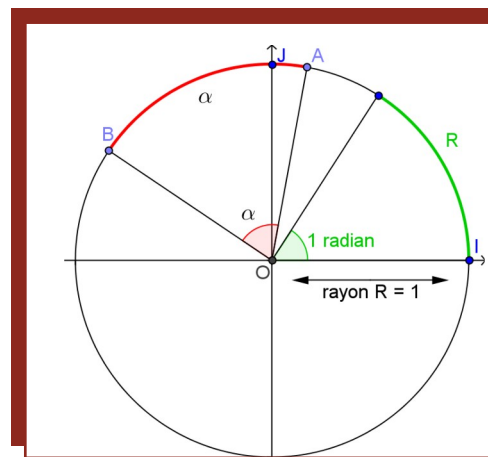
Tout point du cercle est l'image d'une infinité de réels.

Si t est l'un deux, les autres sont les réels $t + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

II. Le radian

Le **radian** est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon R .

Les mesures en degré et en radian d'un angle sont proportionnelles : $180 \times \alpha = \pi \times d$.



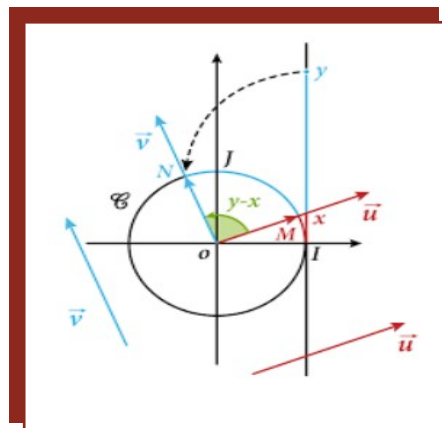
Angle d en degré	180	90	60	45	30	0
Angle α en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

III. Mesure d'un angle orienté et mesure principale

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on construit sur le cercle trigonométrique les points M et N tels que $\overrightarrow{OM}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{v}$.

• La mesure de l'**angle orienté** $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à celle de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

• Pour tout réel x associé au point M et tout réel y associé au point N , $y-x$ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



• L'unique mesure en radian d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelé la **mesure principale** de cet angle.

• La valeur absolue de la mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à la mesure, en radian, de l'**angle géométrique** défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Déterminons la mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$.

1^{ère} méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On effectue la division euclidienne de 273 par 12. On a $273 = 12 \times 22 + 9$.

D'où $\frac{273\pi}{12} = \frac{9\pi + 22 \times 12\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} + 22\pi = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 11\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi[22]$ (on trouve $k = 11$).

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

2^e méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On a alors $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2k\pi$.

$$-\pi < \alpha \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{273\pi}{12} - 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi - \frac{273\pi}{12} < -2k\pi \leq \pi - \frac{273\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{285\pi}{12} < -2k\pi \leq -\frac{261\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow 10,875 \leq k < 11,875$$

Comme k est un entier relatif, on a $k = 11$.

Donc $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2 \times 11\pi = \frac{273\pi}{12} - \frac{264\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

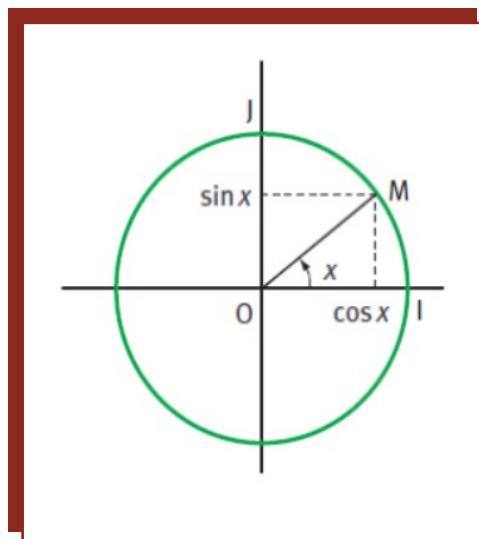
IV. Cosinus et sinus

Soit M un point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.

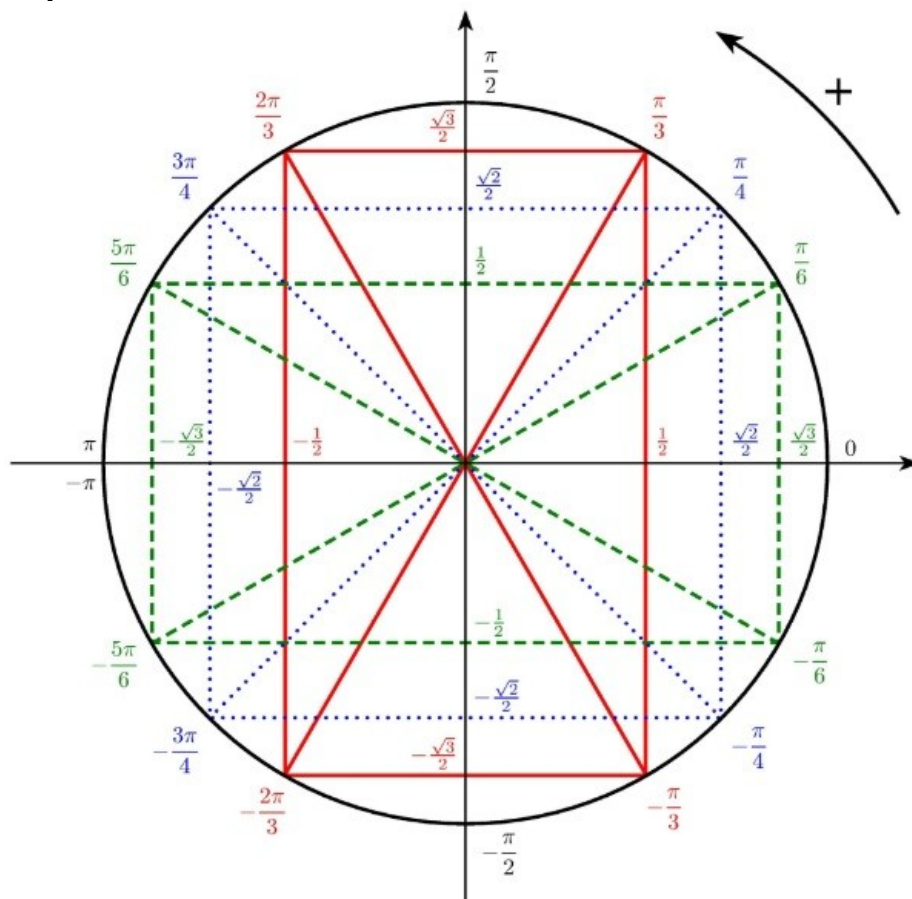
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M et le sinus de x , noté $\sin x$, est son ordonnée.

Soit x un réel et k un entier relatif. On a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$



Valeurs remarquables



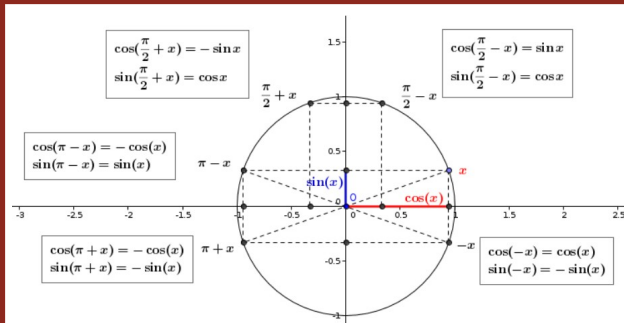
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

V. Formules et équations

Angles associés

Pour tout réel x , on a :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



Équations trigonométriques

Soit x et a deux réels.

L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

VI. Fonctions cosinus et sinus

VI.1 Définitions

- La **fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow \sin x$.
- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow \cos x$.

VI.2 Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π . Elles sont dites 2π -périodiques. Pour tout réel x , $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

VI.3 Parité

- La fonction sinus est une fonction **impaire**. Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$. Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.
- La fonction cosinus est une fonction **paire**. Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$. Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

VI.4 Dérivées

- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

VI.5 Signes

Sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$, les fonctions sinus et cosinus ont les signes suivants :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π			
$\sin x$	0	−	−1	−	0	+	1	+
$\cos x$	−1	−	0	+	1	+	0	−

VI.6 Variations

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π , il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π . On choisit l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

• Variations de la fonction sinus

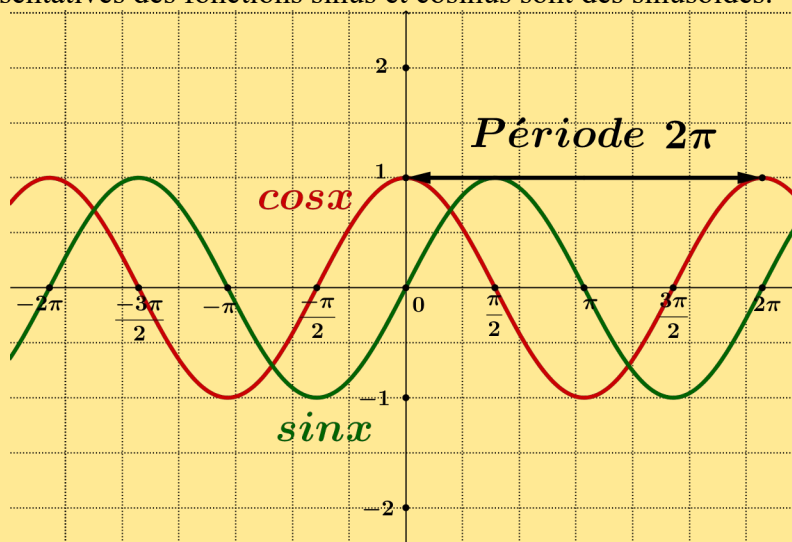
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$\sin' x = \cos x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\sin x$	0	-1	1	0	

• Variations de la fonction cosinus

x	$-\pi$	0	π
$\cos' x = -\sin x$	$+$	0	$-$
$\cos x$	-1	1	-1

VI.7 Représentations graphiques

Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.

VII. Fonctions composées $x \rightarrow \sin(ax+b)$ et $x \rightarrow \cos(ax+b)$

Soit a et b deux réels.

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a \cos(ax+b)$.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -a \sin(ax+b)$.

Les fonctions $x \rightarrow \sin(ax+b)$ et $x \rightarrow \cos(ax+b)$ sont $\frac{2\pi}{a}$ périodiques.

VIII. Résolution d'inéquations trigonométriques

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide des courbes représentatives

Sur la courbe représentative de la fonction sinus (respectivement cosinus), on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\sin x < k$ (respectivement $\cos x < k$).

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le sinus (respectivement le cosinus) est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une ordonnée (respectivement une abscisse) strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.