

Géométrie vectorielle dans le plan

I. Norme d'un vecteur

- Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme de $\vec{u}$ est la longueur AB . On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire**.
- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
- Dans un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

II. Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont la **même direction**, c'est-à-dire si $(AB) \parallel (CD)$.

Remarque

On dit que deux vecteurs sont colinéaires et que deux droites sont parallèles. Mais deux vecteurs ne sont jamais parallèles et deux droites ne sont jamais colinéaires !

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

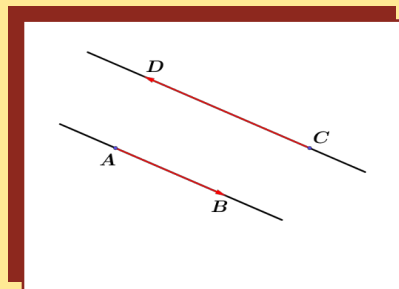
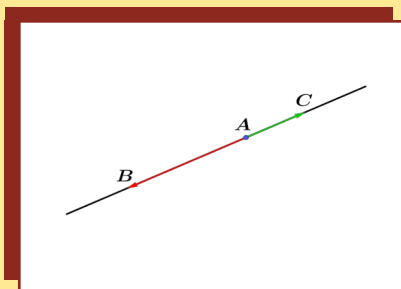
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

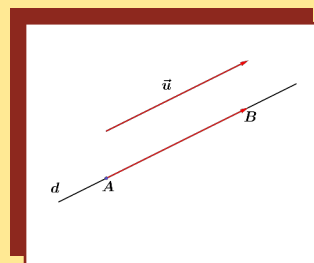
- Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



III. Caractérisation analytique d'une droite

III.1 Vecteur directeur

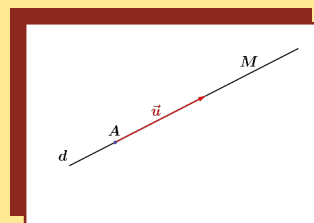
Soit d une droite du plan. Un vecteur $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite d s'il existe deux points distincts A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Le vecteur $\vec{u}$ et la droite d ont alors même direction et on dit que $\vec{u}$ **dirige** la droite d .



Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite d' de vecteur directeur $\vec{u}'$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite d . Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de d si et seulement si $\vec{v}$ est non nul et colinéaire à $\vec{u}$.

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



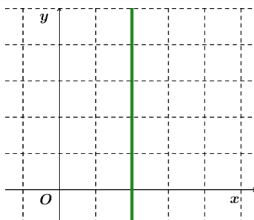
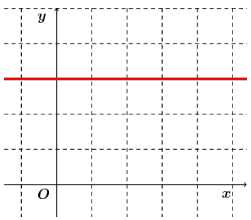
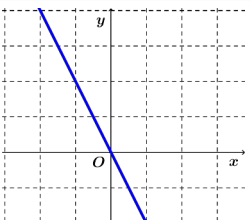
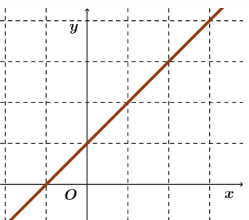
- Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation $x = k$, où k est un réel.
- Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation $y = mx + p$, où m et p sont des réels.

III.2 Équation cartésienne d'une droite

- Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ (c'est-à-dire $a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d .
- Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ est l'équation d'une droite. Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Les droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

III.3 Synthèse

	Cas où $b=0$ et $a \neq 0$	Cas où $a=0$ et $b \neq 0$	Cas où $c=0$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$	Cas où $c \neq 0$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$
Équation cartésienne	$ax + 0 + c = 0$ donc $x = -\frac{c}{a}$	$0 + by + c = 0$ donc $y = -\frac{c}{b}$	$ax + by + 0 = 0$ donc $y = -\frac{a}{b}x$	$ax + by + c = 0$ donc $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
Équation vue en seconde	$x = \text{constante}$	$y = \text{constante}$	$y = mx$	$y = mx + p$
Représentation graphique	 Droite parallèle à (Oy)	 Droite parallèle à (Ox)	 Droite passant par O	 Autre droite

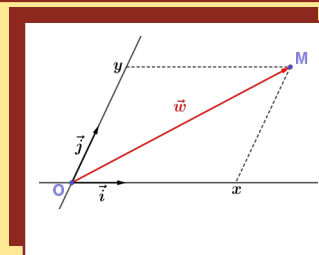
IV. Décomposition d'un vecteur

On appelle **base du plan** tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Remarque

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u}, \vec{v})$.

- Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Dire qu'un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



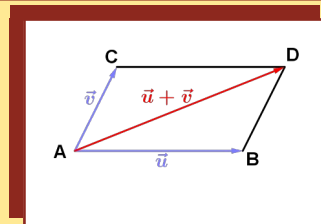
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Le couple $(a; b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ si et seulement si ABDC est un **parallélogramme**.



V. Projection orthogonale

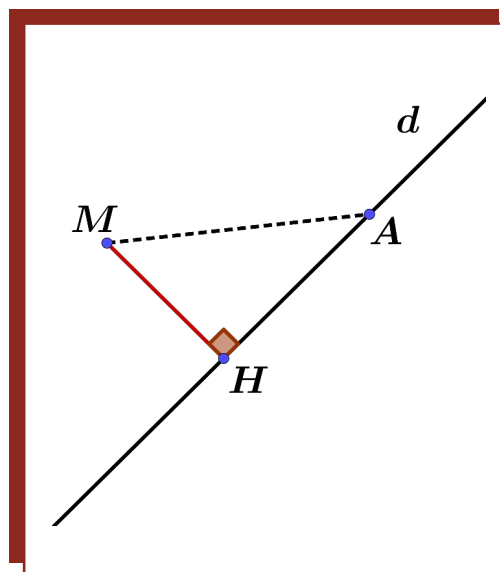
Soit d une droite du plan et M un point n'appartenant pas à cette droite.

On appelle **projeté orthogonal** de M sur la droite d l'unique point H tel que $(MH) \perp d$.

Remarque

Si le point M appartient à la droite d alors il est son propre projeté orthogonal.

On appelle **distance d'un point M à une droite d** la longueur HM où H est le projeté orthogonal de M sur la droite d .



La distance d'un point M à une droite d est la plus **courte distance** entre le point M et un point de la droite.

Produit scalaire dans le plan

I. Produit scalaire

I.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

I.2 Expression analytique

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

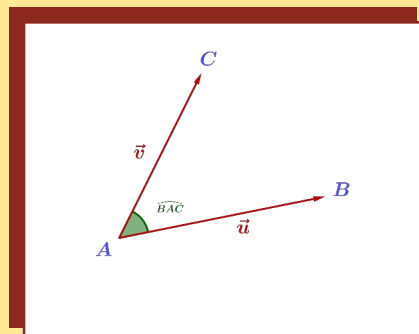
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

I.3 Expression du produit scalaire avec les angles

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'**angle géométrique** $\widehat{BAC}$

où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Si on pose $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$, alors $\cos(\theta) = \cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$.

I.4 Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et λ et α deux réels. Le produit scalaire est :

- Commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Distributif par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Distributif par rapport à la multiplication : $(\lambda \vec{u}) \cdot (\alpha \vec{v}) = \lambda \alpha (\vec{v} \cdot \vec{u})$.

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace.

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls de l'espace.

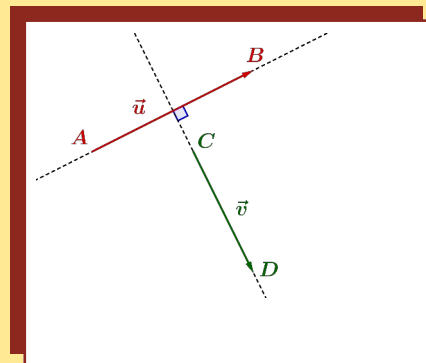
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

II. Produit scalaire et orthogonalité

Deux vecteurs non nuls sont dits **orthogonaux** s'ils dirigent des droites orthogonales.

En particulier, si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

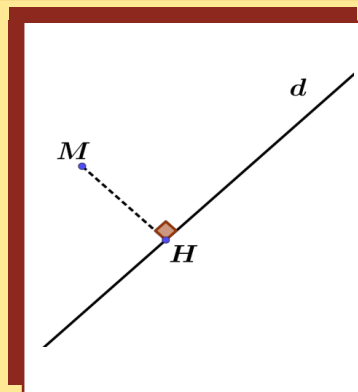


Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

III. Projection orthogonale

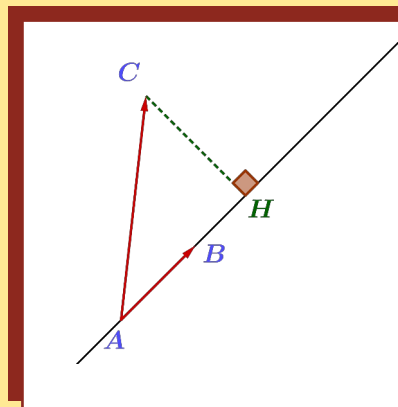
Soit d une droite du plan et M un point n'appartenant pas à cette droite.

On appelle **projeté orthogonal** de M sur la droite d l'unique point H tel que $(MH) \perp d$.



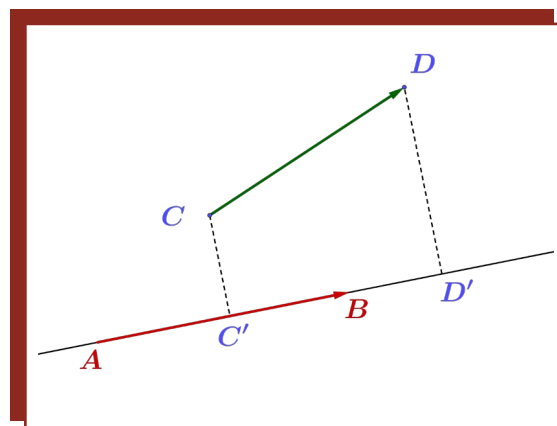
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .



Remarques

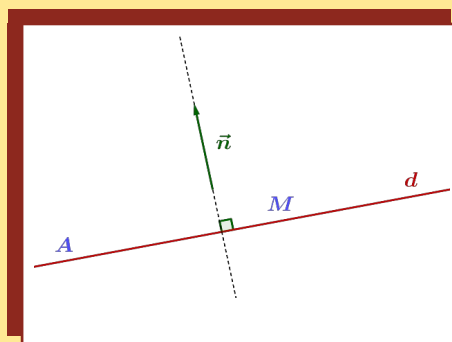
- Le calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs quelconques peut ainsi être ramener au calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.
- Par abus de langage, on dit que $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ (en fait sur la droite (AB)).
- Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. Les points C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB) . Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.



IV. Équation cartésienne de plan

IV.1 Vecteur normal à une droite

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A et M deux points distincts de l'espace. Le vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à la droite (AM) si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux. On note $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point du plan. La droite d passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Remarques

- Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d . Alors :
 - $\vec{n}$ est un vecteur directeur de toute droite d' perpendiculaire à d .
 - $\vec{u}$ est un vecteur normal à toute droite d' perpendiculaire à d .
- Soit d et d' deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ pour vecteurs normaux, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ pour vecteurs directeurs. Alors $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ colinéaires.

IV.2 Vecteur normal et équation cartésienne

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

- Si une droite d a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d .
- Réciproquement, si un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Soit d et d' deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Alors $d \perp d' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

Remarque

Soit d et d' d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Alors $d \perp d' \Leftrightarrow mm' = -1$. En effet, $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} m' \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à d et d' .

Méthode : déterminer une équation cartésienne de droite

Dans un repère orthonormé, soit la droite d d'équation cartésienne $3x - y + 5 = 0$.

- Déterminons un vecteur directeur $\vec{u}$ et un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d .

On a $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Soit la droite d' passant par le point $A(1; 2)$ et perpendiculaire à la droite d . Déterminons une équation cartésienne de d' .

1^{ère} méthode :

Soit $M(x; y)$ un point de d' .

$$\begin{aligned} M(x; y) \in d' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \times 1 + (y-2) \times 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 + 3y - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $d' : x + 3y - 7 = 0$.

2^e méthode :

Comme d est perpendiculaire à d' , alors tout vecteur directeur de d est un vecteur normal de d' . On choisit alors $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'où $d' : x + 3y + c = 0$.

Or le point A appartient à d' , donc ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

D'où $x_A + 3y_A + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 3 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -7$.

Ainsi $d' : x + 3y - 7 = 0$.

V. Distance d'un point à une droite

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point dans un repère orthonormal. La distance du point A à la droite d est définie par :

$$d(A; d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Remarque

On détermine en fait la distance la plus courte du point A à la droite d . Cela correspond à la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur d . Ainsi $d(A; d) = AH = \frac{\|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$.

Applications du produit scalaire

I. Équation de cercle

I.1 Connaissant le centre et le rayon

On appelle cercle de **centre** Ω et de **rayon** $r > 0$ l'ensemble des points M du plan qui sont à la distance r du centre. On le note $C(\Omega; r)$.

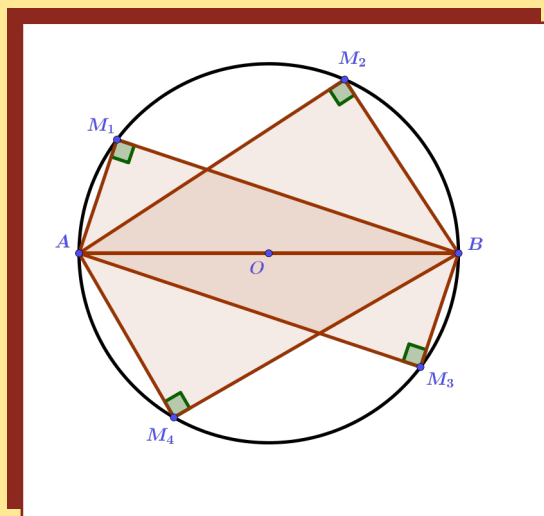
Soit a et b deux réels. Une **équation cartésienne du cercle de centre** $\Omega(a; b)$ et de **rayon** r est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Remarque

On peut également écrire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

I.2 Connaissant un diamètre

Soit A et B deux points fixes. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



I.3 Cercle et triangle rectangle

Soit un triangle ABC . Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$, avec C différent des points A et B .

I.4 Intersection d'un cercle avec une droite

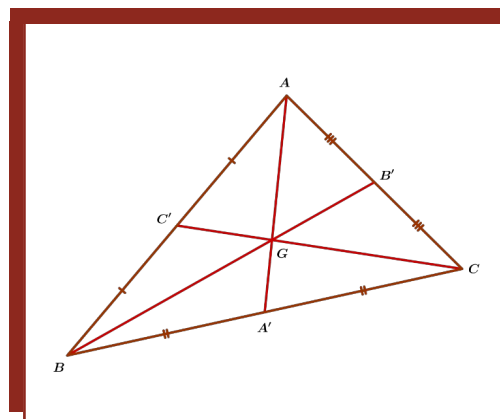
Un cercle et une droite ont 0, 1 ou 2 point(s) d'intersection.

II. Propriétés d'un triangle

II.1 Médiane et centre de gravité

Dans un triangle, la droite issue d'un sommet et qui passe par le milieu du segment opposé est appelée **médiane**.

Soit ABC un triangle. On appelle **centre de gravité** du triangle ABC l'unique point G tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.



Soit un triangle ABC . Alors :

- Les médianes (AA') , (BB') et (CC') sont **concurrentes**.
- leur **point d'intersection** est le **centre de gravité** noté G .
- Le centre de gravité est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet dont elle est issue. Ainsi, $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'}$, $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BB'}$ et $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CC'}$.

II.2 Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$. Alors :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$
- $AB^2 - AC^2 = 2 \vec{AI} \cdot \vec{CB}$
- $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

II.3 Formule d'Al-Kashi

Soit un triangle ABC . D'après la **formule d'Al-Kashi**, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

III. Résolution de problèmes géométriques

Un **lieu géométrique** est un ensemble de points qui satisfont une même condition.

Exemples

- L'ensemble des points M qui vérifient $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
- L'ensemble des points M qui vérifient $\vec{AM} = k \vec{AB}$ est la droite (AB) ou une partie de celle-ci, suivant les valeurs de k .
- L'ensemble des points M qui vérifient $\Omega M = r$ (avec $r > 0$) est le cercle de centre Ω et de rayon r .

Optimiser une quantité, c'est trouver un point ou un lieu qui la maximise ou qui la minimise.