

Géométrie vectorielle dans l'espace

I. Vecteurs de l'espace

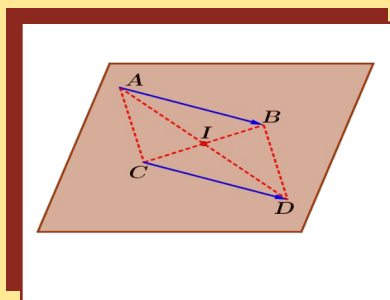
I.1 Définitions et propriétés

Soit deux points A et B de l'espace. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est défini par :

- Une **direction** : la droite (AB) .
- Un **sens** : de A vers B .
- Une **norme** (ou distance) : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ parallélogramme.}$$



Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C , on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.
- Le vecteur $\vec{v}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et un sens contraire si $\lambda < 0$.
- $\|\vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$.

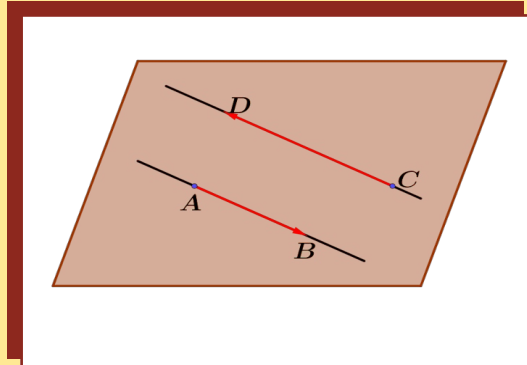
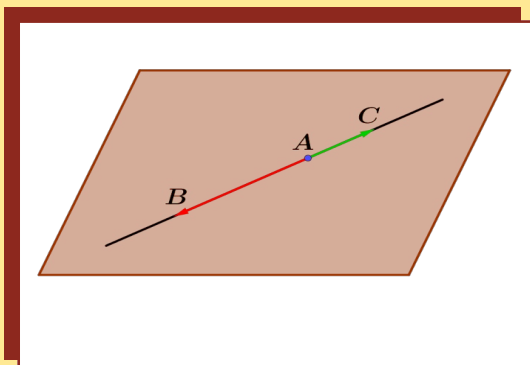
I.2 Colinéarité

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction, c'est-à-dire si $(AB) \parallel (CD)$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k \vec{u}$ ou si l'un d'entre eux est nul.

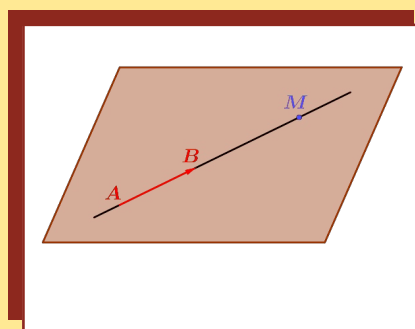
Soit A , B , C et D des points de l'espace.

- A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$.
- $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$.



Soit A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Autrement dit : (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$, avec $k \in \mathbb{R}$.



II. Plans de l'espace et positions relatives

II.1 Le plan

Un plan P peut être défini par trois points A , B et C non alignés. Il est alors noté (ABC) .
Un plan peut aussi être défini par deux droites sécantes ou strictement parallèles.

Différentes façons de définir un plan

par trois points non alignés	par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite	par deux droites sécantes	par deux droites strictement parallèles

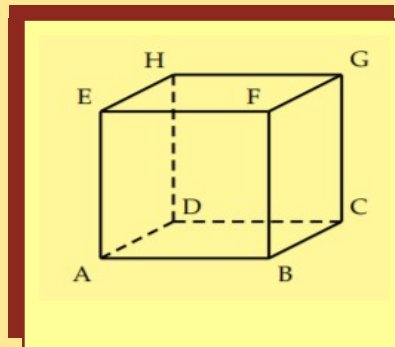
Deux éléments de l'espace (points ou droites) situés dans un même plan sont dits **coplanaires**.

II.2 Positions relatives

Positions relatives entre deux droites

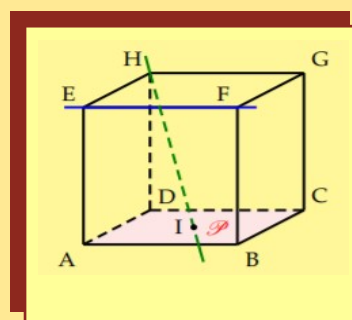
Deux droites, dans l'espace, peuvent être :

- coplanaires, si ces deux droites appartiennent à un même plan [(AF) et (BE)].
- sécantes, si ces deux droites se coupent en un point [(AB) et (AD)].
- parallèles, si ces deux droites sont coplanaires et n'ont aucun point commun ou si ces deux droites sont confondues [(AB) et (HG)].
- non coplanaires [(AB) et (DG)].


Positions relatives entre une droite et un plan

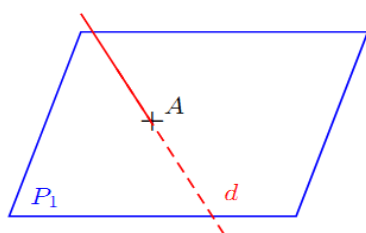
Une droite et un plan peuvent être :

- parallèles : si la droite et le plan n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan [(EF) et P].
- sécantes : si la droite et le plan ont un seul point commun [(HI) et P].

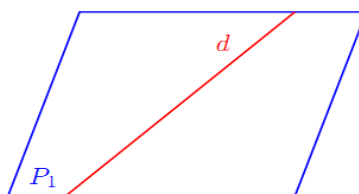

Remarque

En « isolant » une droite et un plan, on obtient les cas suivants :

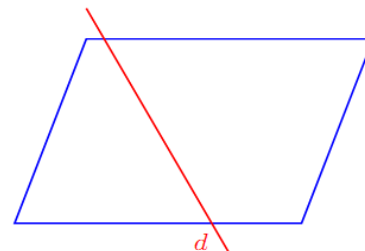
Droite et plan sécants :
un point d'intersection



Droite et plan parallèles :
droite incluse dans le plan

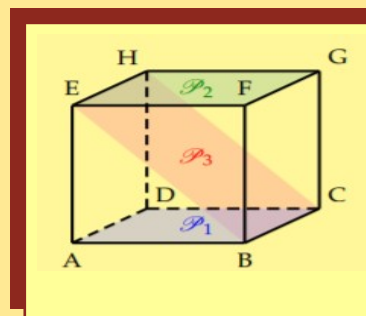


Droite et plan parallèles :
aucun point d'intersection


Positions relatives entre deux plans

Deux plans peuvent être :

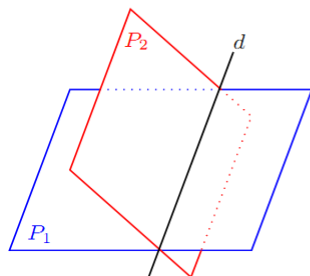
- parallèles : si les deux plans n'ont aucun point commun ou si les deux plans sont confondus ($P_1 \cap P_2 = \emptyset$)
- sécants : si les deux plans ont une droite en commun. ($P_1 \cap P_3 = (BC)$)



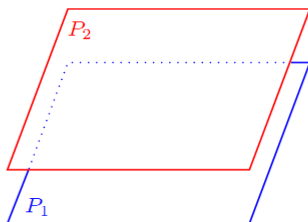
Remarque

En « isolant » deux plans, on obtient les cas suivants :

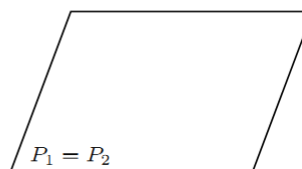
Plans sécants :
un droite d'intersection



Plans parallèles strictement :
aucun point d'intersection



Plans parallèles confondus :
un plan d'intersection

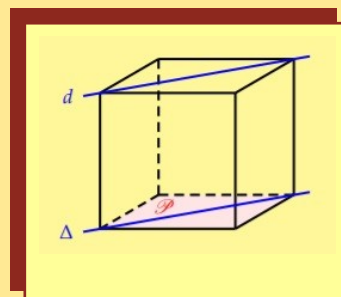


II.3 Parallélisme

Parallélisme d'une droite et d'un plan

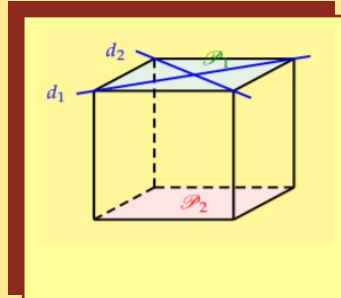
- Si une droite d est parallèle à une droite Δ contenue dans un plan P , alors d est parallèle à P .

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel \Delta \\ \Delta \subset P \end{array} \right\} \text{ alors } d \parallel P$$



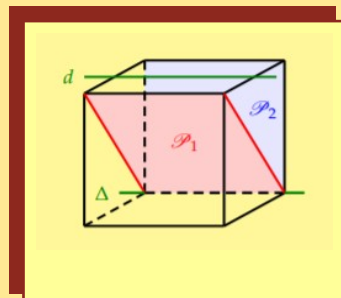
- Si un plan P_1 contient deux droites sécantes d_1 et d_2 parallèles à un plan P_2 , alors les plans P_1 et P_2 sont parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \subset P_1 \text{ et } d_2 \subset P_1 \\ d_1 \text{ et } d_2 \text{ sécantes} \\ d_1 \parallel P_2 \text{ et } d_2 \parallel P_2 \end{array} \right\} \text{ alors } P_1 \parallel P_2$$



- Si une droite d est parallèle à deux plans P_1 et P_2 sécants en une droite Δ alors d et Δ sont parallèles.

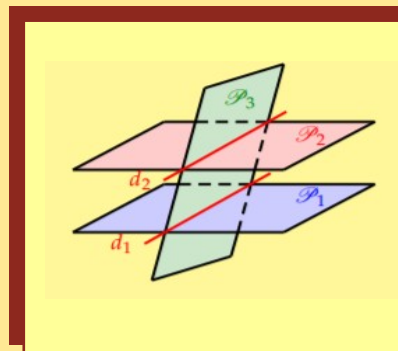
$$\left. \begin{array}{l} d \parallel P_1 \text{ et } d \parallel P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \Delta \end{array} \right\} \text{ alors } d \parallel \Delta$$



Parallélisme de deux plans

Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \parallel P_2 \\ P_1 \cap P_3 = d_1 \end{array} \right\} \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} P_2 \cap P_3 = d_2 \\ d_1 \parallel d_2 \end{array} \right.$$

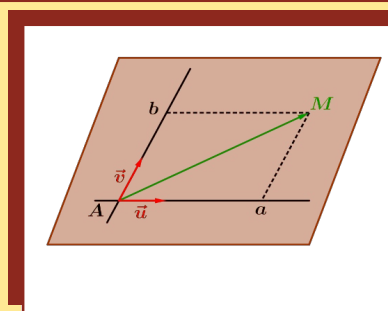


III. Vecteurs coplanaires

III.1 Caractérisation vectorielle d'un plan

Un plan P est engendré par un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

- Le plan P est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
- Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.



Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

III.2 Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A , B , C et D quatre points.

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow \exists! (a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- A , B , C et D coplanaires $\Leftrightarrow \exists! (a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$.

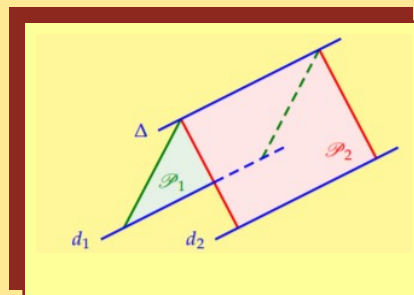
- Une droite D est parallèle à un plan P si et seulement si un vecteur directeur de D est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de P .
- Deux plans P et P' sont parallèles si et seulement si un couple de vecteurs directeurs de P est colinéaire à un couple de vecteurs directeurs de P' .

III.3 Théorème du toit

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2 .

Si ces deux plans P_1 et P_2 sont sécants en une droite Δ , alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2 .

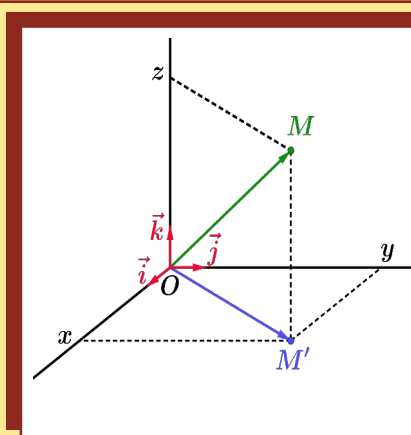
$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \subset P_1 \text{ et } d_2 \subset P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \Delta \end{array} \right\} \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} \Delta \parallel d_1 \\ \Delta \parallel d_2 \end{array} \right.$$



IV. Repérage dans l'espace

IV.1 Repère de l'espace et coordonnées

- Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est un quadruplet constitué d'un point origine O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. On dit alors que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace. Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit **orthonormé** si et seulement si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\|$ et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée avec les mêmes conditions.
- Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les trois réels uniques x , y et z sont appelés coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note x l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote.



IV.2 Décomposition d'un vecteur dans l'espace

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
 Pour tout vecteur $\vec{V}$, $\exists! (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.
 Les trois réels uniques x , y et z sont les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

IV.3 Calculs sur les coordonnées

- Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x', y = y' \text{ et } z = z'$.
 - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$.
 - Le vecteur $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.
 - Si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

V. Représentations paramétriques

V.1 Représentation paramétrique d'une droite

Soit x_0, y_0, z_0, a, b et c des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Le système d'équations
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$
 définit une **représentation paramétrique** de

la droite Δ passant par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

Le réel t est le **paramètre** du point $M(x; y; z)$.

V.2 Représentation paramétrique d'un plan

Soit $x_0, y_0, z_0, a, b, c, \alpha, \beta$ et γ des réels tels que a, b et c ne soient pas proportionnels à α, β et γ .

Le système d'équations
$$\begin{cases} x = x_0 + at + \alpha s \\ y = y_0 + bt + \beta s \\ z = z_0 + ct + \gamma s \end{cases}, (t; s) \in \mathbb{R}^2,$$
 définit une **représentation**

paramétrique du plan P passant par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$. Le couple de réels $(t; s)$ est appelé couple de **paramètres** du point $M(x; y; z)$.

Produit scalaire dans l'espace

I. Produit scalaire

I.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

I.2 Expression analytique

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

I.3 Expression du produit scalaire avec les angles

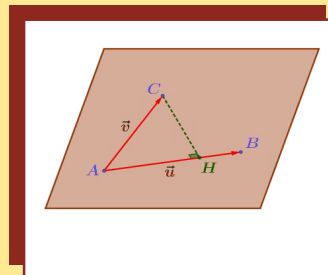
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



I.4 Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et λ et α deux réels. Le produit scalaire est :

- Symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Distributif par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Distributif par rapport à la multiplication : $(\lambda \vec{u}) \cdot (\alpha \vec{v}) = \lambda \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

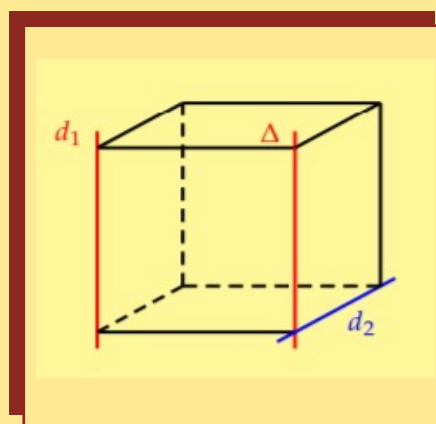
II. Orthogonalité

II.1 Droites orthogonales

Deux droites d_1 et d_2 sont :

- perpendiculaires si et seulement si d_1 et d_2 se coupent perpendiculairement.
- orthogonales si et seulement s'il existe une droite Δ parallèle à d_1 qui est perpendiculaire à d_2 .

On écrira indistinctement pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales : $d_1 \perp d_2$.



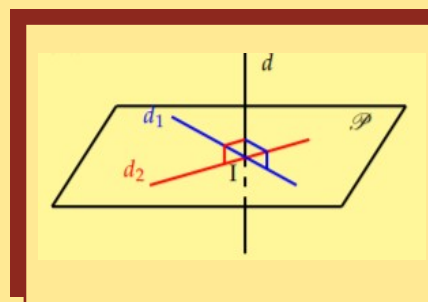
Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

II.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Une droite d est perpendiculaire ou orthogonale à un plan P si et seulement s'il existe deux droites sécantes de P perpendiculaires à d .

Si une droite d est perpendiculaire en I à un plan P alors toute droite de P passant par I est perpendiculaire à d .

$$\left. \begin{array}{l} d \perp P \\ d \cap P = I \\ I \in d_1 \end{array} \right\} \text{ alors } d_1 \perp d_2$$

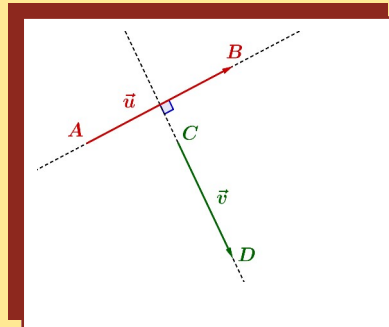


II.3 Orthogonalité et vecteurs

Deux vecteurs non nuls sont dits **orthogonaux** s'ils dirigent des droites orthogonales.

En particulier, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

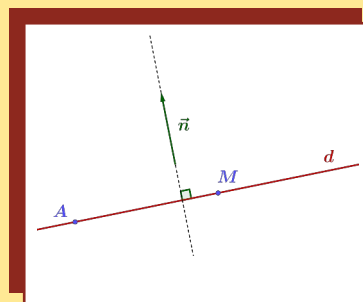
III. Équation cartésienne de plan

III.1 Vecteur normal à une droite

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A et M deux points distincts de l'espace.

Le vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à la droite (AM) si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux.

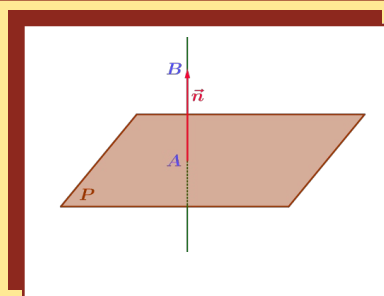
On note $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



III.2 Vecteur normal à un plan

Un vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à un plan P si et seulement si toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan P.

En particulier, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal à P si la droite (AB) est orthogonale à P.

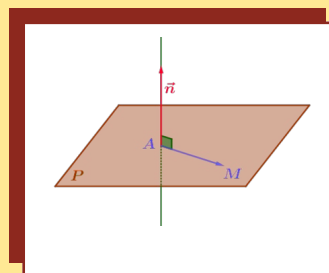


III.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement s'il existe deux droites sécantes de P orthogonales à d .

III.4 Équation cartésienne

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

- Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Réciproquement, si a , b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

IV. Positions relatives de droites et de plans

IV.1 Position entre une droite et un plan

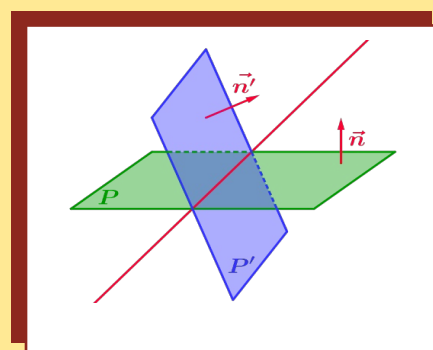
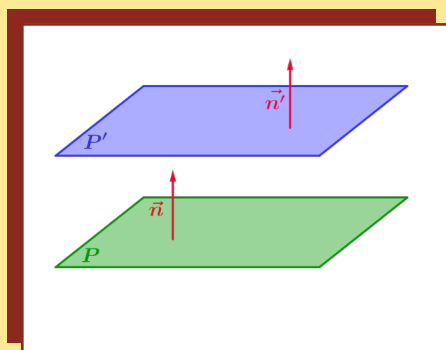
Soit d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite d et le plan P sont sécants.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et que A appartient à P , la droite d est incluse dans le plan P .
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et que A n'appartient pas à P , la droite d est strictement parallèle au plan P .

IV.2 Position entre deux plans

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

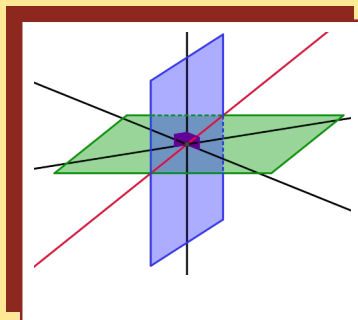
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, les plans P et P' sont parallèles.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans P et P' sont sécants d'intersection une droite.



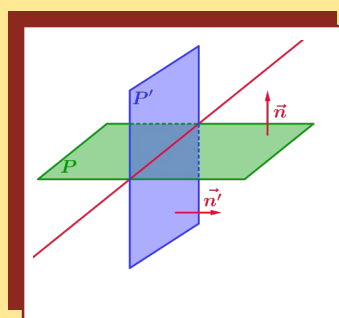
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

- Les plans P et P' d'équations cartésiennes respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles si et seulement si $(a; b; c)$ est proportionnel à $(a'; b'; c')$.
- Lorsque $(a; b; c)$ n'est pas proportionnel à $(a'; b'; c')$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace qui vérifient $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une droite.

Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre.



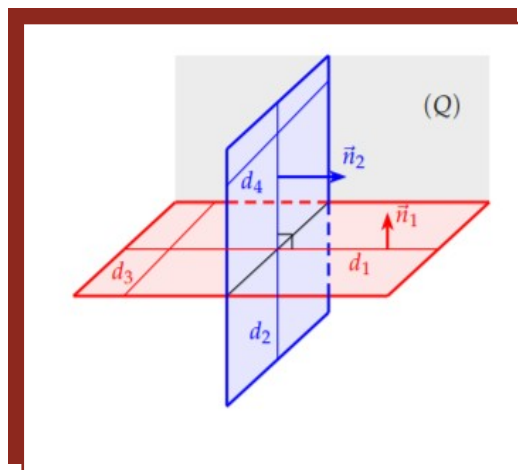
Deux plans P_1 et P_2 de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires ou orthogonaux si et seulement si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.



Remarque

La notion d'orthogonalité de deux plans est moins souple qu'avec deux droites.

- Si $P_1 \perp P_2$, une droite d_3 de P_1 peut être parallèle à une droite d_4 de P_2 .
- Si un plan Q est perpendiculaire à deux plans P_1 et P_2 , les plans P_1 et P_2 ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.



Méthode : étude de position relative de plan

On considère les plans P_1 , P_2 et P_3 d'équations cartésiennes respectives :

$$2x - 3y + z - 1 = 0, \quad 4x - 5y + 3z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + 4z - 6 = 0$$

- Déterminons la position relative des deux plans.

Le vecteur $\vec{n}_1(2; -3; -1)$ est un vecteur normal à P_1 et le vecteur $\vec{n}_2(4; -5; -3)$ est un vecteur normal à P_2 . Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires car le triplet $(2; -3; 1)$ n'est pas proportionnel au triplet $(4; -5; 3)$. Les plans P_1 et P_2 n'étant pas parallèles, ils sont sécants.

- Déterminons une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Les plans P_1 et P_2 sont sécants d'intersection une droite Δ . Pour déterminer Δ , on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 4x - 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 3y + 1 \\ 4x - 5y + 3(-2x + 3y + 1) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 3y + 1 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y + 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

On choisit y comme paramètre et on pose $y = t$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t, \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On a donc obtenu une équation paramétrique de la droite Δ .

- Déterminons que les plans P_1 et P_3 sont perpendiculaires.

Le vecteur $\vec{n}_3(1; 2; 4)$ est un vecteur normal à P_3 .

On a $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 1 \times 4 = 2 - 6 + 4 = 0$. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_3$ sont orthogonaux.

Ainsi les plans P_1 et P_3 sont perpendiculaires.

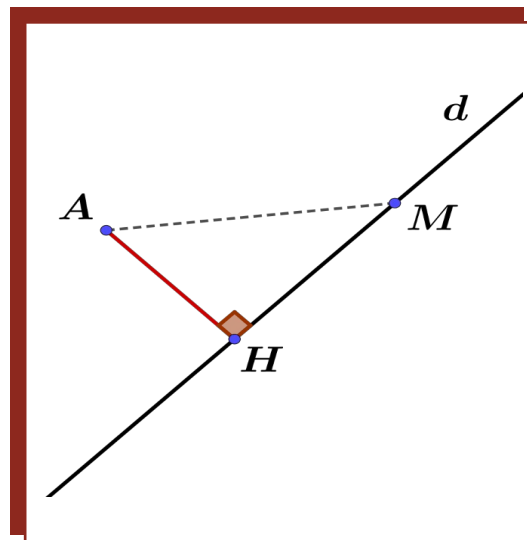
V. Projection orthogonale et distance

V.1 Distance d'un point à une droite dans le plan

Soit d une droite du plan et A un point n'appartenant pas à cette droite.
On appelle **projeté orthogonal** de A sur la droite d l'unique point H tel que $(AH) \perp d$.

On appelle **distance d'un point A à une droite d** la longueur AH où H est le projeté orthogonal de A sur la droite d .

La distance d'un point A à une droite d est la plus courte distance entre le point A et un point de la droite d . On a $d(A; d) = AH$.



Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point dans un repère orthonormal. La distance du point A à la droite d est définie par :

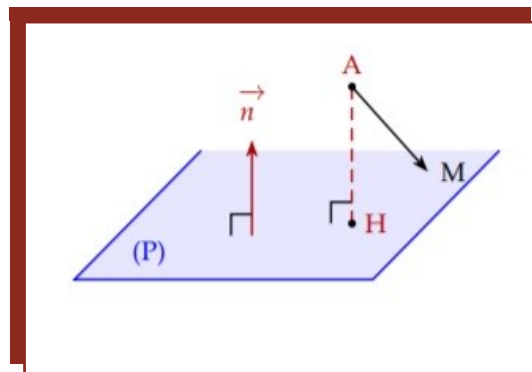
$$d(A; d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.2 Distance d'un point à un plan

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point extérieur au plan.

On appelle **projeté orthogonal** de A sur P l'intersection du plan et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A .

On appelle **distance d'un point A à un plan P** la longueur AH où H est le projeté orthogonal de A sur le plan P .



La distance d'un point A à un plan P est la plus courte distance entre le point A et un point du plan. En particulier, on a $d(A;P)=AH$.

Soit P un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point dans un repère orthonormal. La distance du point A au plan P est définie par :

$$d(A;P)=\frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

VI. Équation de sphère

La sphère de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM=R$.

Soit $I(\alpha; \beta; \gamma)$ et $M(x; y; z)$ deux points de l'espace. Une équation cartésienne de la sphère de centre I et de rayon R dans un repère orthonormal est $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$.

La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.