

Combinatoire et dénombrement

I. Définitions générales

I.1 Ensemble et vocabulaire

Un ensemble E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle élément. On dit alors que x appartient à E et on note $x \in E$.

Remarques

- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\emptyset$.
- L'ordre n'intervient pas : $\{a; b\} = \{b; a\}$. De plus, il n'y a pas répétition d'un élément : $\{a; a\} = \{a\}$.

Soit E un ensemble. On appelle partie de E un ensemble F tels que tous les éléments de F appartiennent aussi à E . On dit que F est **inclus** dans E et on note $F \subset E$.

Soit A et B deux ensembles.

- La réunion $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B .
- L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B .

Soit A et B deux ensembles. A et B sont **disjoints** lorsqu'ils ne possèdent aucun élément en commun, autrement dit quand leur intersection est vide. On note $A \cap B = \emptyset$.

On appelle **k -uplet** ou **k -liste** d'un ensemble E une collection ordonnée d'objets qu'on appelle, selon les cas, coordonnées, composantes ou termes. Un k -uplet s'écrit avec des parenthèses.

Remarques

- Un 2-uplet s'appelle un **couple** et un 3-uplet s'appelle un **triplet**.
- L'ordre intervient, c'est-à-dire que $(a; b) \neq (b; a)$.
- Les objets peuvent être identiques. De ce fait, le couple $(a; a)$ existe.

I.2 Ensemble fini et cardinal

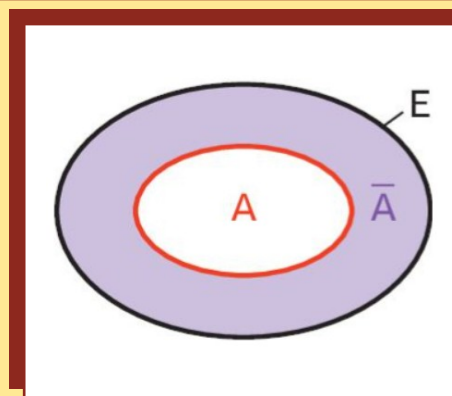
Soit un entier naturel n . Un ensemble E est dit **fini** s'il possède n éléments. Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal** de E , noté $\text{Card}(E)$.

II. Principes additif et multiplicatif

II.1 Principe additif

Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis disjoints deux à deux. Alors $\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n)$.

Soit A une partie d'un ensemble E fini et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E .
Alors $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.



II.2 Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** de E par F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Ainsi $E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$.

Remarque

$A \times B$ se lit « A croix B ».

Soit E et F deux ensembles finis non vides. Alors $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Attention !

Le signe $\times$ dans $\text{Card}(E \times F)$ désigne le produit cartésien des ensembles E et F , alors que celui dans $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ désigne la multiplication du nombre d'éléments de E par celui de F .

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E_1, E_2, \dots, E_k$, k ensembles non vides.

On note les k -uplets $(x_1; x_2; \dots; x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k .

- L'ensemble de ces k -uplets est le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$.
- Si les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont **finis**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \prod_{i=1}^k \text{Card}(E_i) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_k)$$

III. Dénombrement

III.1 Nombre de k-uplet d'un ensemble à n éléments

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide. Un **k -uplet** (ou **k -liste**) d'éléments de E est un élément du produit cartésien $E^k = E \times E \times \dots \times E$.

Soit k et n deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n .
Le nombre de k -uplets de E est n^k . On a alors $\text{Card}(E^k) = [\text{Card}(E)]^k = n^k$.

III.2 Factorielle

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle n** (ou **n factorielle**) le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

- $0! = 1$
- $n! = n(n-1)!$
- $(n+1)! = (n+1)n!$

III.2 Arrangements d'un ensemble

Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini non vide à n éléments. Un **arrangement** de k éléments de E (ou **k -arrangement**) est un k -uplet d'éléments distincts de E .

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.
Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. Le nombre de k -arrangements de E est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

III.3 Permutations d'un ensemble

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini non vide à n éléments.
Une permutation de E est un n -uplet d'éléments deux à deux distincts de E .

Remarque

Les permutations d'un ensemble correspondent à tous les ordres possibles dans les n -uplets constitués des éléments de l'ensemble.

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$.

IV. Combinaisons

IV.1 Partie d'un ensemble fini

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E .

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$, c'est-à-dire 2^n .

IV.2 Combinaisons

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini de cardinal n . On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E ayant k éléments. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$.

Remarque

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

IV.3 Propriétés des combinaisons

Soit n un entier naturel.

- $\binom{n}{0} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 élément : la partie vide.
- $\binom{n}{1} = n$. Dans un ensemble à n éléments, il existe n parties ayant un élément.
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.
- $\binom{n}{n} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.

Propriété de symétrie

Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires.

Relation de Pascal

Pour tous entiers naturels $n \geq 2$ et k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque

Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n=5$ et $k=2$, on a

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

V. Critères à retenir

Pour dénombrer toutes les éventualités d'un problème, les deux critères à prendre en compte sont :

- les éléments peuvent-ils être répétés ?
- l'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

On résume alors les différentes réponses dans le tableau suivant :

Critères	Répétition	Pas de répétition
Ordre	k -listes ou k -uplets (n^k)	k -listes d'éléments distincts (arrangement ou permutation)
Pas d'ordre	Combinaisons avec répétition (hors programme)	Combinaisons $\binom{n}{k}$